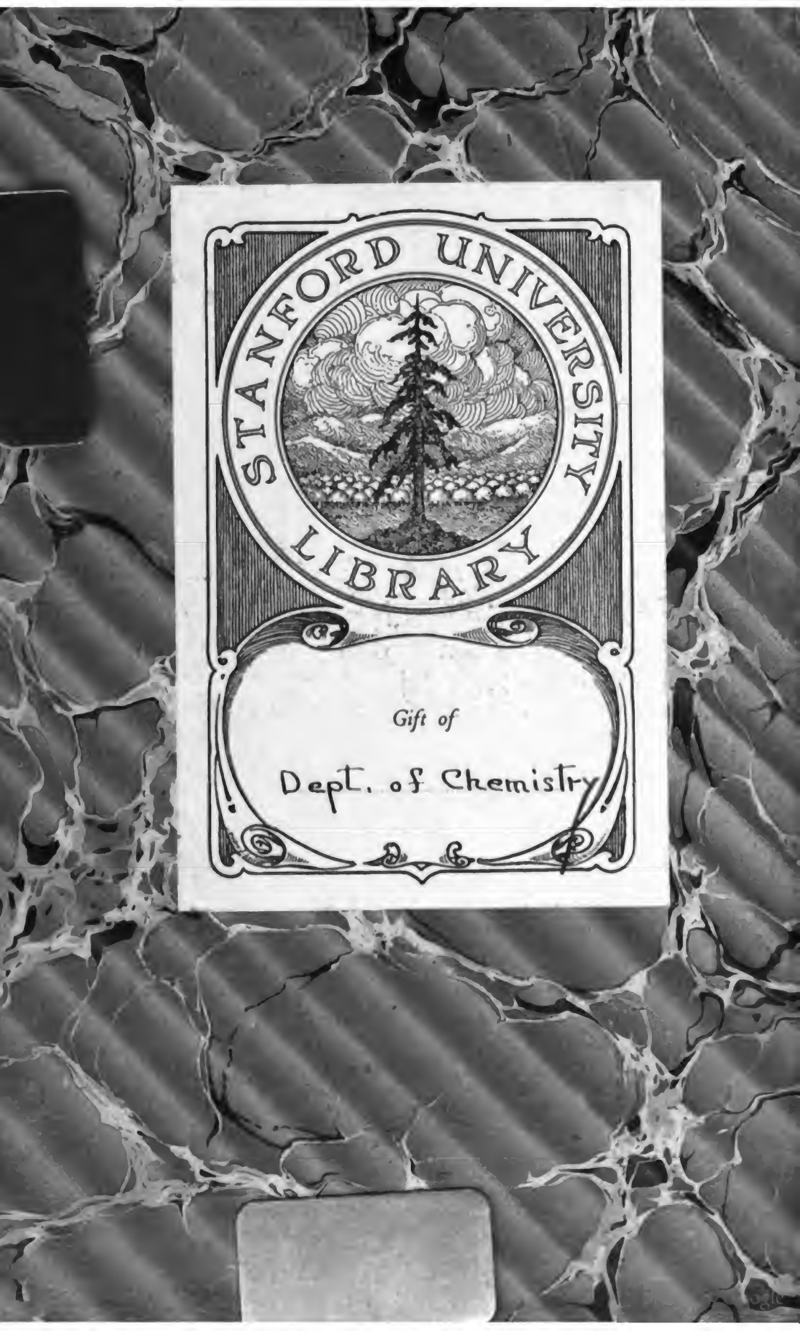
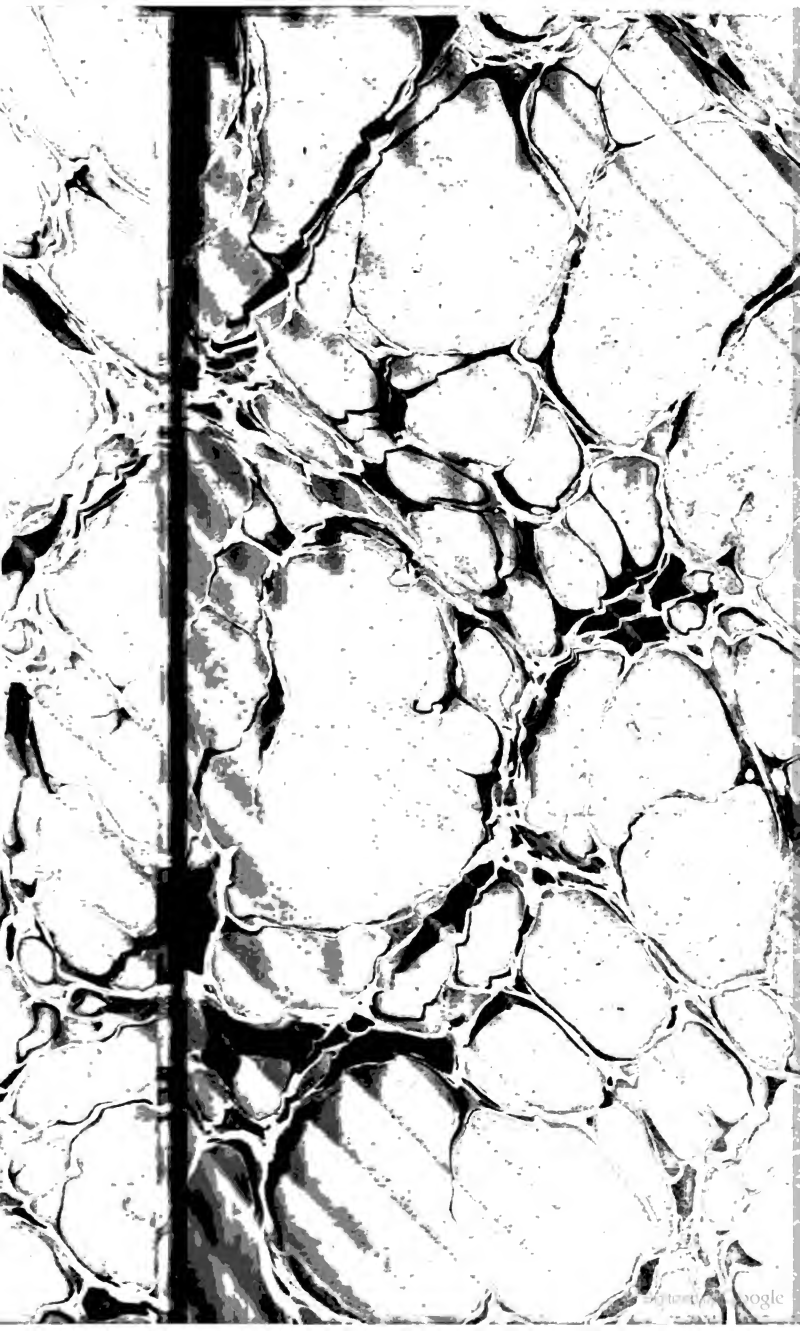

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARY
Gift of
Dept. of Chemistry



2 Vols $3,00

te 11

TRAITÉ

DE

CRISTALLOGRAPHIE.

Ouvrages de M. HAÜY qui se trouvent chez les mêmes Libraires.

Traité élémentaire de Physique, 2 vol. in-8., avec 19 planches,	15 fr.	» c.
Tableau comparatif des résultats de la Cristallographie, 1 vol. in-8°,	5	50
Traité des Caractères physiques des Pierres précieuses, 1 vol. in-8°, 1817, fig.,	6	

Sous presse par souscription.

Traité de Minéralogie, deuxième édition, entièrement refaite sur un plan nouveau, 4 vol. in-8° et Atlas d'environ cent dix planches.

DE L'IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
RUE DU JARDINET-SAINT-ANDRÉ-DES-ARCS, N° 12.

TRAITÉ
DE
CRISTALLOGRAPHIE,

SUIVI

D'UNE APPLICATION DES PRINCIPES DE CETTE SCIENCE
A LA DÉTERMINATION DES ESPÈCES MINÉRALES,

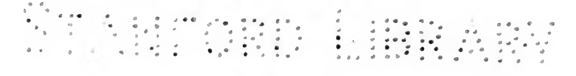
ET

D'une nouvelle Méthode pour mettre les formes cristallines
en projection;

PAR M. L'ABBÉ HAÜY,

Chanoine honoraire de l'Église métropolitaine de Paris, Membre de la Légion-d'Honneur, Chevalier de l'Ordre de Saint-Michel de Bavière, de l'Académie royale des Sciences, Professeur de Minéralogie au Jardin du Roi et à la Faculté des Sciences de Paris, de la Société royale de Londres, de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, des Académies royales des Sciences de Berlin, de Stockholm, de Lisbonne et de Munich; de la Société Géologique de Londres, de l'Université impériale de Wilna, de la Société Helvétienne des Scrutateurs de la Nature, et de celle de Berlin; des Sociétés Minéralogiques de Dresde et d'Iéna, de la Société Batave des Sciences de Harlem, de la Société Italienne des Sciences, de la Société Philomatique de Paris, etc.

TOME PREMIER.



PARIS,

BACHELIER ET HUZARD, GENDRES ET SUCCESSEURS DE Mme Ve COURCIER, LIBRAIRES POUR LES SCIENCES,

Rue du Jardinet-Saint-André-des-Arcs.

1822.



INTRODUCTION.

La théorie, dont le développement est le principal objet de ce traité, touchait de près à sa naissance lorsque j'en ai publié, il y a environ trente-sept ans, les premiers résultats dans un ouvrage où je ne donnais mon travail que pour un simple essai, qui avait besoin d'être soumis à de nouvelles recherches pour qu'il fût permis de le ranger parmi les genres de connaissances dont le sort est fixé sans retour.

Je n'avais appliqué ma théorie qu'à un petit nombre d'espèces, et j'avais employé des méthodes particulières, soit pour déterminer les angles des cristaux qui appartiennent à ces espèces, soit pour vérifier les propriétés géométriques dont quelques-uns m'avaient offert les indices.

L'espérance que ces premiers résultats m'avaient fait concevoir pour la suite, s'est réalisée. Les nombreuses applications que j'ai faites des lois de la structure, et que j'ai consignées dans le Traité de Minéralogie, qui a paru en 1801, et

depuis, ont
théorie dont il
de plus en plus
degré de généra-
analytiques si bien
sciences, à l'aide
qui diffèrent en
viennent se ranger
leur sert comme de

que je me suis pro-
l'état auquel l'ont amenée
et la perfectionner. Je
plan que j'ai suivi, comme
en faciliter l'étude.
les problêmes d'analyse, dont
la marche de la nature,
produits par des méthodes très
les résultats souvent inattendus,
quelques-uns même excitent notre sur-
l'air de paradoxe sous lequel ils se pré-
lorsque, guidés par le simple raison-
nous revenons ensuite pas à pas sur la
que le calcul avait franchie rapidement,
finissons par apercevoir la manière d'agir
causes qui ont donné naissance aux résultats
il s'agit. L'étude de la Cristallographie a sur-
l'avantage de se prêter aux conceptions de ce
genre. Les cristaux étant des assemblages de mo-

...ires soumises à certaines lois d'ar-
..., les projections qui les représentent
...nt de leçons parlantes pour un observa-
...entif, et cela est vrai surtout d'une projec-
dans laquelle les formes des molécules sont
...ndues par de petits solides d'un volume sensible. Il en résulte que les faces du cristal qui en a fourni le modèle, et qu'il offre sous l'aspect de plans continus, par une suite de l'extrême petitesse des molécules, se montrent telles qu'elles sont réellement, c'est-à-dire comme des assemblages de bords ou d'angles solides situés sur les mêmes molécules, et dont les alignemens et la disposition retracent aux yeux de l'observateur la route que la cristallisation a suivie pour arriver à son but.

C'est en partant de ces considérations que j'ai divisé l'exposé de la théorie en deux parties, l'une synthétique et l'autre analytique. Dans la première, j'associe le simple raisonnement aux projections des formes cristallines, pour rendre sensible aux yeux ce que la théorie montre à l'esprit; ou si je me permets quelquefois l'usage du calcul, c'est seulement dans le cas où il s'agit d'un résultat de cristallisation qui, indépendamment de ce que le raisonnement nous en apprend, peut devenir l'objet d'une recherche intéressante, comme celle qui aurait pour but de déterminer, d'après certaines données qui se présentent comme d'elles-mêmes, le nombre de petits solides re-

l'arrangement des molécules dont le cristal est l'assemblage.

La partie analytique renferme l'exposé des formules dont j'ai parlé plus haut, et de leurs usages, soit pour déterminer les formes cristallines relatives à une même espèce, et pour les lier les unes avec les autres et avec la forme primitive dont elles dérivent, soit pour développer les propriétés géométriques émanées de leurs dimensions et de leur structure, qui ajoutent beaucoup à l'intérêt qu'offre par elle-même l'étude de ces formes, et dont on n'aurait peut-être jamais soupçonné l'existence, si la théorie n'était venue nous en avertir. Les calculs qu'elle emploie ne supposent que la connaissance de l'algèbre ordinaire; mais il faut de l'exercice et une certaine sagacité pour assortir la construction des problèmes et la méthode de les résoudre à un sujet tout particulier, où la nature se montre si riche en produits d'une géométrie qui n'est qu'à elle. Pour simplifier les applications de la théorie, j'ai été attentif à chercher, parmi les différentes manières de résoudre un même problème, celle qui était la plus directe, et à n'y mettre que la juste mesure de calcul qui suffisait à mon but.

Je vais exposer, dans une analyse raisonnée, le plan que j'ai suivi, en traitant chacune des deux parties dont je viens de parler.

Je commence la première par un parallèle des

minéraux avec les êtres organiques, qui me conduit à indiquer les différences remarquables qu'établit entre les uns et les autres la manière dont ils se forment et s'accroissent. Je donne ensuite une division générale des formes que l'on appelle *cristallines*, et remontant à la naissance des corps qui les présentent, et à l'ordre suivant lequel l'affinité a réuni leurs molécules, j'en déduis l'idée à laquelle est attaché le mot de *cristal*. Je fais ressortir un caractère distinctif très remarquable qui résulte de ce mode de formation auquel on a donné le nom de *cristallisation*, et qui consiste dans la faculté qu'ont les molécules d'un même minéral de donner naissance à une multitude de formes différentes, toutes régulières, tandis que les individus qui appartiennent à une même espèce de plante se ressemblent par la forme, le nombre et la disposition respective des organes de la fructification et par la manière d'être des autres parties, en sorte que chaque individu est censé représenter l'espèce entière.

Je donne ensuite une notion des formes cristallines, en me bornant à celles qui offrent les types des espèces, ou de celles qui sont comme les élémens dans lesquels elles se résolvent à l'aide d'une opération que je ferai bientôt connaître. Chacune des formes dont il s'agit étant susceptible de varier d'une espèce à l'autre par la mesure de ses angles, ou, ce qui revient au même, par les in-

présentatifs des molécules dont le cristal es
semblage.

La partie analytique renferme l'exposé
mules dont j'ai parlé plus haut, et de leur
soit pour déterminer les formes cristalli
tives à une même espèce, et pour les lie
avec les autres et avec la forme prim
elles dérivent, soit pour développer le
tés géométriques émanées de leurs dir
de leur structure, qui ajoutent beauc
rêt qu'inspire par elle-même l'étude d
et dont on n'aurait peut-être jama
l'existence, si la théorie n'était v
avertir. Les calculs qu'elle emploi
que la connaissance de l'algèbre
il faut de l'exercice et une certai ns
assortir la construction des pro de
thode de les résoudre à un suje vent
où la nature se montre si riche espèce,
géométrie qui n'est qu'à elle. es faces
applications de la théorie, j'ai u plus éloi-
cher, parmi les différentes m que dans tel
un même problème; celle qu peuvent sou-
et à n'y mettre que la juste éométrique qui
suffisait à mon but. semble de toutes

Je vais exposer, dans ossible. Au reste,
le plan que j'ai suivi, en t jet, me réservant à
parties dont je viens de dans la partie analy-

Je commence la pre

...its, je dirai com-
...aux carbonatée,
...pe auquel il adhé-
...t une petite portion
...en cet endroit une in-
... qui n'avait besoin que
...elle devînt comme la clef
...rirai l'opération à l'aide de
...de l'indication dont j'ai parlé,
...me hexaèdre régulier un rhom-
...104^d $\frac{1}{2}$ (1), qui lui servait comme
...exposerai les résultats de toutes les
... même genre, auxquelles celle-ci a
...odèle, ce qui m'a conduit au principe
...tal de la théorie dont j'ai parlé. Il con-
...ce que tous les cristaux de diverses for-
...i appartiennent à un même minéral, ren-
...ent un solide que l'on peut en extraire en
...vant successivement toutes les lames qui le
couvrent, et dont la forme est constante tant
que l'espèce reste la même, mais varie d'une es-
pèce à l'autre. Les différens noyaux que la divi-
sion mécanique des minéraux a offerts jusqu'ici,
se rapportent à cinq genres de solides dont je
donne la définition.

(1) Cet angle est celui que forment entre elles deux faces prises vers un même sommet du rhomboïde.

clinaisons mutuelles de ses faces; pour déter
ner ces inclinaisons, et en général toutes c
qui existent sur les formes cristallines rela
aux différentes espèces, j'emploie un instr
qui porte le nom de *goniomètre*, et dont
l'invention à M. Carangeau. J'en donne
description détaillée, et j'indique la man
faire usage.

De là je passe aux variations que su
formes cristallines originaires d'une m
et particulièrement à celles qui ne s
dentelles, en sorte qu'elles laissent
nombre et les inclinaisons respecti
et n'influent que sur leurs dime
figures, sans toutefois que la sym
Les variations dont il s'agit ont l
les cristaux qui résultent de la
plusieurs formes simples qui c
exister séparément parmi les i
et elles proviennent de ce ... es,
d'un même ordre sont plus ... des
gnées du centre dans tel ... tre sé-
autre. Je fais voir que ces v ... l'analyse
vent être ramenées à une
dépend de la condition ... sortir ce que
les faces soit le plus si ... offre de très re-
je ne fais qu'ébaucher i ... dre ne pouvant
y revenir avec plus de ... s, les trois formes
tique. ... son du nombre et

détermi-
es celles
relatives
strument
t on doi
e ici un
ière d'

ssent
e esp
qu'
sist
s
et

urs faces, sont le
parallélipi-
antes,

di-
que
erva-
en gé-
et de la
irige. Eco-
richesse et
tats.
nt les molécules
es cristaux qui en
un nouveau de-
elles empruntent de
cevoir en quoi il con-
ne exemple le prisme
déré comme forme primi-
t le monde sait que si l'on
rayons, en allant du centre
vera sous-divisé en six trian-
; or, il est visible que ces trian-
deux, composent des rhombes,
a base peut aussi être considérée
ssemblage de trois de ces rhombes.
maintenant que l'on fasse passer par
ons des plans perpendiculaires à la base;

A la suite du résultat pr[illegible]prismes
un autre qui lui est lié, et [illegible] de six
continuant de pénétrer d[illegible] menés
'structure par la division [illegible] j'ai parlé;
à ses différentes faces [illegible]posé que
plans encore. Cette di[illegible]ront pour
lides, tous semblable[illegible] division du
sous-divisions succe[illegible]n que pres-
tres de la même fo[illegible] de toutes les
un moindre volu[illegible] ait lieu pa-
puissions aperce[illegible] terminent,
pour ainsi dire, le[illegible] des prismes
ne pouvons do[illegible] que les applica-
ceux que nous [illegible]rivées du prisme
jusqu'aux dern[illegible] où les formes
que j'appelle [illegible]res sont des pris-
sont réunies [illegible] la théorie relative
pendues, pou[illegible] son but, en faisant
de l'opératio[illegible] qui résultent de
molécules [illegible]intégrantes, le même
sont celles [illegible] primitive serait
molécules [illegible]dal semblable à ceux
parées les [illegible] La même corrélation a
chimique [illegible] les molécules inté-
Mainte[illegible] et ceux où elles sont
le résult[illegible] suite de ce que la
marqua[illegible]èdres présente l'équi-
pas av[illegible] simple.
les plus [illegible] *soustractives* ces parallé-

mes triangulaires ou
ntôt que ce nom de *sou*
manière dont agissent
structure, et qui m'a suggé
décroissement que je leur
ce qui précède que le parallé
ne l'unité à laquelle viennent abo
tions de la théorie aux différent
tives. Il lui est pour ainsi dire ind
ce parallélipipède soit indivisible
de se résoudre en parties fraction
a marche est absolument la même da
s cas.

s tout ce que j'ai dit jusqu'ici, je n'ai cons
que les résultats de la division mécanique d
ers noyaux inscrits dans les cristaux, et l
ormes sous lesquelles s'offrent les molécules i
tégrantes qu'elle retire de ces noyaux. Or, l
plans suivant lesquels chacun d'eux se laisse div
ser, et que je nomme *joints naturels*, parce qu'
passent entre ses lames composantes, se prolo
gent dans la matière enveloppante; d'où il s
qu'elle n'est qu'un assemblage de molécules in
grantes semblables à celles dont le noyau
composé; et c'est de l'ordre suivant lequel el
sont assorties que dépendent le nombre, les
gures et les inclinaisons respectives des faces q
terminent le polyèdre auquel elles ont donné na
sance. J'ai exposé, avec le développement conv

ils sous-diviseront le prisme hexaèdre en six [illegible]
triangulaires égaux et semblables. Au lieu [illegible]
plans, n'en supposons que trois qui soien[illegible]
par les côtés intérieurs des rhombes dont [illegible]
le prisme ne sera plus censé être com[illegible]
de trois prismes à quatre pans, qui a[illegible]
bases les mêmes rhombes. Or, la [illegible]
prisme hexaèdre, faite sous la conditi[illegible]
crit ce genre d'opération, à l'égard [illegible]
formes primitives, et qui exige qu'el[illegible]
rallèlement aux différentes faces qui [illegible]
donne pour molécules intégrant [illegible] ur
triangulaires. Mais nous verrons [illegible] rme
tions de la théorie aux formes d[illegible] e l'on
hexaèdre régulier s'assimilent à [illegible], on ob-
qu'elle considère comme primi[illegible] mmet py-
mes rhomboïdaux, en sorte q[illegible] faces dont
au prisme hexaèdre remplit [illegible]. On remar-
jouer aux prismes rhomboïd[illegible] on détache suc-
la réunion de deux molécule[illegible] autre sommet,
rôle que dans le cas où la [illegible] à mesure
elle-même un prisme rhom[illegible] suit que si on
dont je viens de parler. [illegible] en commençant
lieu entre les cristaux [illegible] le noyau, elles
grantes sont des tétraèd[illegible] qu'elles s'en éloi-
des parallélipipèdes, p[illegible] les directions des
réunion de plusieurs [illegible] dont il s'agit, on
valent d'un parallélip[illegible] tantôt à ceux
J'appelle *molécul*[illegible] noyau, tantôt aux

ixprismes
eu de six
nt menés
j'ai parlé
posé qu
ront po
vision
que p
toutes
t lieu
ermin
pri
ap
u p
es
de
e
n

les ligne

i a
itue
nombr
es, qui
représen
ns que l'o
me cube e
térieures d'au
e ébauche de l
s le passage d
lont je me propos
me sers d'une suit
figure carrée, et don
de cubes égaux à ceu
olécules intégrantes. J
couvrement, de maniè
semblable à une pyramid
je place la base sur une de
est bien évident que les cube
aque lame sont distribués pa
ves, parallèlement aux différen
lame. Or, tel est le rapport entr
s lames dont il s'agit, que la pre
on contour une rangée de moins qu
où elle couvrirait entièrement la fac
lante du noyau. Chacune des rangée

nable, dans la partie synthétique de ce traité, l
lois auxquelles est soumis l'assortiment don
s'agit, et les diverses manières dont elles m
fient leur action, pour opérer les nombreuse
tamorphoses que les cristaux qui apparti
à une même espèce de minéral sont susc
de subir. Je vais donner ici une idée de
et pour mieux en faire concevoir la m
ferai l'application à un exemple très s
je tirerai d'une variété qui apparties
de minéral que j'ai nommée *aplom*

Si en divisant mécaniquement u
en extraire le noyau, on fait atte
des parties de la matière envel
enlève pour mettre ses faces à
servera qu'elles se terminent
ramidal, ou en un somme
deux sont séparées par u
quera de plus que les lam
cessivement en partant d
augmentent progressive
qu'on approche du no
les prend dans l'ord
par celle qui est en
iront en décroissa
gneront. Enfin, si
bords qui termin
verra que ces b
des faces corre

que les
loi-
e par
a sa vé-
t les faces
ables.
ynthétique, un
ructure de ce do-
eviendra sensible à
e qui le montrera cir-
représentera en relief
écroissantes qui le recou-
e formule dont on pourra
de tous les petits solides cubi-
comme molécules intégrantes,
re est l'assemblage, en supposant
isse le nombre d'arêtes de molécule
s chaque bord du noyau.
les bords des lames décroissantes sont
vers les diagonales des faces du noyau,
olécules disposées sur plusieurs rangées
essives, dont les premières sont contiguës
mêmes bords, ne se réunissent plus par une
e leurs faces; elles ne se touchent que par une
arête. C'est une suite de ce qu'elles s'engrènent les unes dans les autres dans le sens où nous les considérons ici. Du reste, les quantités dont les lames décroissantes sont dépassées les unes par les autres ont toujours pour mesure une ou

[illegible] résulte des [illegible] que celles qui [illegible] sur les [illegible] régulier ori- [illegible]

[illegible] les bords des lames [illegible] intermédiaires [illegible] niveau et des diago- [illegible] je me bornerai à dire que [illegible] considère comme [illegible] lames, sont des as- [illegible] molécules intégrantes ou [illegible] assimilent aux molécules [illegible] de manière à former des [illegible] qui se prêtent également [illegible] dont dépendent les formes [illegible]

[illegible] résultats des trois modes de [illegible] si l'on peut parler, j'ai été [illegible] considérations qui me parais- [illegible] de fixer l'attention, lorsqu'on veut se rendre compte à soi-même de tout ce qui [illegible] au mécanisme de la structure. Je vais en citer deux exemples.

Il existe des cristaux dont la forme est celle d'un octaèdre que l'on appelle *cunéiforme*, parce que deux de ses faces prises vers chaque sommet, au lieu de se réunir avec les deux autres en un même point, comme dans les octaèdres

ordinaires font leur jonction sur une arête commune, en sorte que leur figure est celle d'un trapèze dont le petit côté coïncide avec cette arête. C'est ce qui a lieu par exemple dans une partie des cristaux de baryte sulfatée. Or, si l'on compare entre eux plusieurs de ces cristaux, on observera que la longueur de l'arête terminale augmente ou décroît de l'un à l'autre, et cela dans un rapport très sensible. Mais la théorie donne la limite à laquelle elle s'arrêterait toujours si la cristallisation atteignait constamment le but vers lequel elle tend, et dont elle ne s'écarte que par l'effet des variations accidentelles que subit l'ordre de la structure. Je donnerai le développement convenable à ce point de théorie, et je déterminerai, à l'aide d'une formule générale, la limite dont je viens de parler.

Dans les cristaux ordinaires, les arêtes situées à la jonction de deux faces produites par une loi de décroissement, ou bien sont des lignes pleines, comme lorsque le décroissement agit dans deux sens opposés sur un des bords du noyau, ou bien sont des suites d'angles solides ou d'arêtes de molécules situées dans un même plan et qui étant d'une extrême petitesse, se présentent sous l'apparence de lignes pleines.

Il en est autrement du prisme hexaèdre régulier de la chaux carbonatée, dont on extrait le rhomboïde primitif de cette substance minérale.

plusieurs des mêmes rangées, et il en [illegible] se
formes secondaires aussi simples q [illegible] cen-
sont produites par les décroisse [illegible] des
bords. De ce nombre est l'octaè [illegible] est si
ginaire du cube. [illegible] en ré-

Quant au troisième cas, où le [illegible] des
décroissantes ont des directio [illegible] aèdre,
entre celles des bords du n [illegible] n'ex-
nales de ses faces, je me [illegible] nos re-
les petits solides que la théo [illegible] état
étant les élémens de ce [illegible] par la
semblages de 2, 3, 4 [illegible]
davantage, lesquelles s' [illegible] aux cris-
simples, en s'alignant [illegible] décrois-
rangées successives [illegible] structure
à l'action des lois d [illegible] se suc-
secondaires. [illegible] la matière

En étudiant les [illegible] obligé
décroissement do [illegible] initiales
conduit à diverse [illegible] commence
sent mériter de [illegible] terme, où l'au-
se rendre com [illegible] agissent si-
concourt au m [illegible] s'arrête à l'en-
en citer deux [illegible] exemples

Il existe d [illegible] dans les dé-
d'un octaèdre [illegible] juste idée de
que deux de [illegible] structure des
met, au lie [illegible]
en un mê [illegible] j'appelle *auxi-*

orsque ceux qui agissent
. faces du noyau, adjacentes
ur les trois faces qui concou-
d'un même angle solide,
des lois différentes, ont de
.e les deux ou les trois faces
en résultent coïncident sur un
plus, il peut arriver, et il arrive
souvent, qu'un des décroissemens
ndis que l'autre ou les deux autres
rche composée, soit à raison de la
rangées soustraites, soit parce qu'ils
n vertu de ces assemblages de molé-
ples dont j'ai parlé plus haut. Dans ces
e cas, on considère le décroissement
, comme le principal, et celui qui seul
ine la position de la face secondaire
uite, et les autres ne sont censés intervenir
pour seconder l'effet du premier, et pour
olonger la face dont il s'agit au-delà du bord
u de l'angle auquel on rapporte le premier,
comme à son terme de départ.

Les applications de la théorie, qui font le sujet de l'article suivant, me paraissent déjà très dignes d'attention, dans le cas même où elles ne seraient que spéculatives. Mais elles deviennent doublement intéressantes par l'avantage qu'elles ont de servir à simplifier et à faciliter celles qui, considérées en elles-mêmes, sont les

La théorie prouve que ses faces latér[illegible]
réunissent pas sur des lignes contin[illegible]
sées telles, mais qu'elles sont sép[illegible]
facettes rectangulaires, dont la [illegible]
petite, qu'elle échappe à nos [illegible] [illegible]ion
sulte que le prisme considéré [illegible] division
lois de la structure, est ré[illegible] [illegible] un
en sorte que le nom de [illegible] hypothé-
prime que ce que l'obs[illegible] de plus
gards, et ne s'accorde [illegible] de petits
des choses que la [illegible] viendrait en
pensée. [illegible] plans pa-

Une autre con[illegible] en faire
taux qui sont [illegible] décroisse-
sement ou da[illegible] celle
de ce crist[illegible]
cèdent le[illegible] nouveau
qui enve[illegible] théorie, je
d'assign[illegible] comme exemple.
des dé[illegible] substance,
par ag[illegible] structure,
tre p[illegible] sont origi-
mult[illegible] autres par
droi[illegible] de toutes
rela[illegible] Si donc
tail[illegible] primitif fasse un
la [illegible] avec chacun
cri[illegible] on aura 1570
[illegible] c'est-à-dire

'is aussi grand que celui
lois relatives au vé-

istent les avan-
s applications
secondaires
complication en-
ns et un travail plus ou
, si l'on essayait de les déter-
ement. Mais on peut alors sub-
a forme primitive un noyau hypo-
qui dérive du véritable, à l'aide d'une
nple de décroissement, et faire dépendre
suite la forme secondaire de ce noyau, en
vertu d'une autre loi de décroissement également
simple. Cela fait, on remonte à la véritable détermination, qui devient facile, parce que les résultats relatifs au noyau hypothétique ont, pour ainsi dire, aplani la route escarpée qui devait y conduire.

Je déduis de ces résultats une conséquence remarquable, que je rapporte aussi à la chaux carbonatée; c'est que dans la supposition où ses cristaux se refuseraient à la division mécanique, la théorie suffirait seule pour faire reconnaître sa forme primitive à des caractères que j'indique.

Arrivé à la loi que j'appelle de *symétrie*, je n'oublie rien de ce qui peut appeler l'attention des minéralogistes sur cette grande loi de la cristallisation, dont l'influence se communique

[illegible] les lois particulières d'où [illegible] les cristaux. Pour en don-[illegible] deux manières d'être [illegible] les angles d'une forme pri-[illegible] *identiques* ne font [illegible] : tels sont, par exemple, [illegible] qui ont la même longueur, [illegible] entre des faces également in-[illegible]. La loi de symétrie con-[illegible] même espèce de décroisse-[illegible] les bords ou sur tous [illegible], tandis que ceux qui ne le [illegible] une autre espèce de dé-[illegible], ou même rester libres. Je cite di-[illegible] qui réalisent la distinc-[illegible] d'énoncer, et je prouve que les [illegible] offrent de la loi de symétrie, [illegible] celles qui naissent des autres formes, peuvent être utiles pour démêler dans l'as-[illegible] qui se montre pour la première fois, l'espèce de solide à laquelle se rapporte sa forme primitive. Je fais voir encore que la ressemblance ou la diversité d'éclat qui naît de la réflexion de la lumière sur les joints naturels des cristaux, fournit des indications qui s'accordent avec celles des parties identiques et de celles qui ne le sont pas.

En lisant les traités de Minéralogie publiés par les auteurs étrangers, on trouvera qu'une partie les déterminations qu'ils ont données des formes primitives ne soutient pas l'épreuve de la loi

de symétrie, qui est comme la pierre de touche de ce genre de résultats, et on aura lieu de s'étonner que des hommes aussi attentifs qu'éclairés, aient méconnu une loi si simple et qui se présente si naturellement à l'esprit. J'ajoute que nous ne pouvons regarder autour de nous sans la rencontrer. Les artistes l'observent scrupuleusement dans leurs ouvrages, en assimilant les parties qui se correspondent, par les formes qu'ils leur donnent et par les ornemens dont ils les embellissent. Ils ramènent tout à ce principe, qu'il faut que l'œil soit satisfait; et sans qu'ils s'en aperçoivent, leur art ne fait ici autre chose que d'imiter en quelque sorte ce que la science nous montre dans les productions de la nature.

La distinction que nous avons admise entre le noyau d'un cristal et la matière qui l'enveloppe, n'est qu'une donnée dont se sert la théorie pour déterminer les lois auxquelles est soumise la structure des cristaux secondaires; mais le noyau n'est pas le terme auquel arrive d'abord la nature, comme d'un seul jet, pour ajouter ensuite successivement à son volume les lames dont la matière enveloppante est l'assemblage; c'est le centre du cristal qui est son véritable point de départ, et c'est là qu'elle fait naître un embryon de ce cristal, qui déjà renferme un noyau composé du plus petit nombre possible de molécules intégrantes, et a subi l'effet initial de la

aux résultats de toutes les lois particulières d[illegible]
dépendent les formes des cristaux. Pour en [illegible]
ner une idée, je distingue deux manières [illegible]
relatives des bords et des angles d'une for[illegible]
mitive. Ceux que j'appelle *identiques* [illegible]
qu'un au jugement de l'œil : tels sont, par [illegible]
deux bords opposés qui ont la même [illegible]
et sont compris entre des faces ég[illegible]
clinées l'une sur l'autre. La loi de [illegible]
siste en ce qu'une même espèce [illegible]
ment se répète sur tous les bor[illegible]
les angles identiques ; tandis qu[illegible]
sont pas peuvent subir une [illegible]
croissement, ou même rest[illegible]
verses formes cristallines q[illegible]
tion que je viens d'énonce[illegible]
indications qu'elles offre[illegible]
et en général toutes cell[illegible]
formes, peuvent être u[illegible]
pect d'un cristal qui se [illegible]
l'espèce de solide à [illegible]
primitive. Je fais v[illegible]
ou la diversité d'[illegible]
la lumière sur [illegible]
fournit des indi[illegible]
des parties iden[illegible]

En lisant le[illegible]
les auteurs ét[illegible]
les détermin[illegible]
primitives [illegible]

ıi balance
e. J'applique
aux différentes
uvent se rencon-
git, et je fais entre-
is que subit leur rap-
rsités qui ont lieu dans
is auxquelles est soumise

suivans j'expose deux objec-
té faites relativement à l'ordre
, tel que le suppose la théorie,
que j'en donne me paraît d'autant
ante, qu'elle s'accorde avec la ma-
Newton et d'autres savans d'un mérite
ont envisagé la constitution physique
ps.

première est fondée sur ce que dans l'hypo-
se où les faces des cristaux secondaires seraient
llonnées par des cannelures, ou chargées d'aspé-rités, ainsi que l'indique la marche des décroissemens, elles ne pourraient, dans aucun cas, réfléchir la lumière avec assez de régularité pour les rendre miroitantes. Je ferai voir que l'objection, si elle était réelle, attaquerait à plus forte raison le pouvoir réfléchissant de toute espèce de miroir, mais qu'elle disparaîtra si l'on admet l'idée très plausible de Newton sur la manière dont s'opère la réflexion.

loi ou des lois de [illegible] suggérée par l'observa-
la forme sous laque[illegible] j'ai donné le nom de
volume sensible, [illegible] les distinguer de ceux que
embryon s'acc[illegible] on aperçoit des indices
ches qui se sup[illegible] à la faveur des frac-
de molécul[illegible] les cristaux de certaines sub-
mentant, e[illegible] qui appartiennent à la chaux
la matière [illegible] toujours dans l'intérieur de
l'autre p[illegible] parallèlement à des faces produites
Il en [illegible] de décroissement, ou susceptibles
la for[illegible] Telle est quelquefois la diversité de ceux
prop[illegible] minéralogistes ont cru voir dans
exe[illegible] cristal, et qui, selon eux, passeraient
do[illegible] ces petits solides que je nomme *mo-
[illegible]cules intégrantes*, que si l'objection avait du
[illegible]ment, ils les morcelleraient au point d'en
faire nier l'existence. J'expose les raisons qui me portent à considérer les joints dont il s'agit comme de simples apparences, dues à une multitude de petites réflexions partielles qui naissent sur les parties saillantes des molécules dans les intervalles que celles-ci laissent entre elles, en sorte qu'elles conservent l'intégrité de leur forme.

Le but de l'article qui vient ensuite est de donner une idée de la fécondité des lois de décroissement, qui nous paraîtrait être sans bornes, si les quantités des rangées soustraites s'étendaient indéfiniment au-delà des premiers termes de la série des nombres naturels. Mais pour la

r dans ses véritables limites, il faut s'en
à ce que nous apprend la théorie, et à ce
la manière d'agir familière à la nature sem-
e elle-même nous dire, que les décroissemens les plus ordinaires sont en même temps les plus simples, et que les plus rares ne s'écartent de la simplicité des premiers que jusqu'à un terme peu reculé, en sorte que tout ce qui est au-delà doit être jugé impossible; or, en me bornant à ceux dont j'ai parlé d'abord, et en supposant qu'ils aient lieu par 1, 2, 3, 4 rangées sur les bords ou sur les angles d'un rhomboïde, tel que celui de la chaux carbonatée, je démontre, à l'aide d'une formule, que dans cette hypothèse, le nombre des formes possibles est de 8388604. Je suis éloigné de croire que toutes ces formes existent dans la nature; il y en a sûrement une grande partie qu'on ne verra jamais qu'à travers la théorie. Ma collection en renferme à peu près 160 qui sont les seules que j'aie observées. M. le comte de Bournon porte à 620 le nombre de celles dont il donne la détermination dans son Traité complet de la chaux carbonatée et de l'arragonite, ouvrage qui fait honneur en même temps à l'étendue et à la variété de ses connaissances. Mais, en supposant que nous ayons sous les yeux toutes celles qui ont été produites par la cristallisation dans les cavités souterraines où elle a joui de sa liberté, on ne peut douter que le nom-

L'autre objection a été suggérée par l'ob
tion des joints auxquels j'ai donné le n
surnuméraires pour les distinguer de c
j'appelle naturels, et dont on aperçoit d
plus ou moins sensibles à la faveu
tures qu'ont subies les cristaux de c
stances, surtout ceux qui appartien
carbonatée. Ils sont toujours dar
ces cristaux, parallèlement à d … on et
par des lois de décroissemen … donné le
de l'être. Telle est quelquefoi … cristaux. Ce
que plusieurs minéralogist … d'exposans
un même cristal, et qui … soit avec
à travers ces petits sol … primitives ,
lécules intégrantes, q … et les
fondement, ils les n … signes
faire nier l'existenc … du noyau
me portent à con … laquelle il se
comme de simpl … opérer le pas-
titude de petite … à l'or-
sur les parties … l'aide d'une
intervalles q … fidèle de la
sorte qu'ell … modèle sous
Le but … des figures
donner u … de mon Traité ,
croissem … de cet avantage.
si les q … élèves des
daient … du nombre
de la … aujourd'hui
… physiciens dont

dans la Cris-
'il n'avait
nen-
de
entatif
ressem-
devant lui,
is vu (1). A cet
nt la seconde édi-
offrira de nombreux
ce que les signes repré-
n moyen simple et facile
liquement la série de toutes
minables qui appartiennent à
ce minérale, d'après l'ordre des
une à une, deux à deux, trois à
is de décroissement dont elles dépen-
n résulte que s'il survient une variété
ors inconnue, sa place se trouve marquée
ace dans la série (2).
but que je me suis proposé dans la partie
cet ouvrage dont je viens de présenter l'ana-
yse, a été d'y donner une description raisonnée

---

(1) C'est au même savant que j'ai été redevable de presque toutes les figures dépendantes de la partie analytique.

(2) J'ai employé, dans mon Traité de Minéralogie, cette distribution à l'égard de la chaux carbonatée. Mais c'est la seule espèce à laquelle je l'aie appliquée.

bre indiqué par la formule ne fût incomp
ment plus considérable. Pour avoir une j
de sa puissance, il fallait généraliser l
de la représenter, parce qu'elle ne se
sur l'ensemble de ce qui est, mais d … le
être. … dé-

Il ne me restait plus, pour ter … un
synthétique, qu'à expliquer l … ion-
l'usage de ces formules auxq … drait
nom de *signes représentati* … ent,
sont des assemblages de l … se rat-
numériques dont telle est … qu'ils
les bords et les angles … On
soit avec les décroissen … de
autres subissent les ac … fini d'un
étant donné, il suffit d' … odèle.
d'où dérive la form … renferme
rapporte, pour voi … à l'aide
sage d'une forme … rang des
dre de la struct … principes cer-
nouvelle projec … évidentes,
variété propos … d'une main
les yeux. Le … l'autre celui
destiné pour … j'ai faites
a offert de … dont la
L'exécution … à la mé-
mines, pl … adoptée par
desquels é … qui joint
un rang t … simple, plus ex-

pouvoir seule
.alculs qu'elle em-
.onnaissance de l'Al-
.l est facile de parvenir
.ne mettre à la portée de
.ient faire une étude suivie
.renferme, j'ai exposé, relati-
.opération, la marche progressive
.quelle je suis arrivé de l'équa-
servi à construire le problème, à
en donne la solution, et j'ai évité d'y
.es lacunes que les géomètres exercés au-
.aisément remplies, en faveur des commen-
.s qui auraient pu être embarrassés pour re-
trouver le fil de l'opération.

Parmi les cinq formes primitives données par la division mécanique, je choisis d'abord le rhomboïde, comme objet de la méthode dont il s'agit. Il doit cette prérogative à la chaux carbonatée, à l'égard de laquelle cette forme est d'une fécondité pour ainsi dire inépuisable. Je détermine d'abord les rapports entre les diagonales et autres lignes qui entrent dans la construction du solide, et dont on déduit les valeurs de ses angles plans et saillans. Je m'occupe ensuite successivement des diverses espèces de décroissemens qui, en agissant sur les bords et sur les angles du rhomboïde primitif, produisent les formes secondaires. Je donne des formules générales toutes préparées

des principa[illegible] elles les cristallines. [illegible] ne s'agit pas d'y avo[illegible] mériques, prescrire. [illegible] situées sur ment qu[illegible] tres qui les plus dans [illegible] nombre des tails qui [illegible] croissement nouvea[illegible] considère, et nent e[illegible] es, on obtient souve[illegible] es proposés. surto[illegible] rts entre les tache[illegible] ux des formes sont [illegible] considération pour [illegible] j'ai parlé plus pin[illegible] intéressans, soit por[illegible] qu'ils ont de [illegible] on des formes le [illegible] décroissemens, d[illegible]

[illegible] silence un autre [illegible] relatives au so- [illegible] aux autres formes [illegible] développement [illegible] dont jouissent une [illegible] de parler, et plu- [illegible] comme secon- [illegible] ces dernières, les [illegible] qui portent les noms [illegible] de *contrastante*, et

l'analogique qui mérite doublement de fixer l'attention, soit lorsqu'elle se laisse reconnaître du premier coup d'œil aux caractères de symétrie dont la cristallisation l'a ornée, soit lorsqu'elle se fait chercher dans les hémitropies qui la déguisent. Je dois dire aussi un mot des problèmes à double solution, dont le rhomboïde présente les sujets. Je citerai pour exemple le cas où deux rhomboïdes secondaires, semblables entre eux, naissent de deux décroissemens en sens contraire sur un même angle du rhomboïde primitif. La limite des cas de ce genre est celle qui a lieu, en vertu d'un seul décroissement, qui produit un rhomboïde secondaire semblable au noyau. La Cristallographie a réalisé ce résultat dans deux variétés, dont l'une appartient à la chaux carbonatée et l'autre à la tourmaline. Je me borne à ce peu d'exemples que j'ai choisis parmi le grand nombre de ceux que je pourrais citer. Ils seront développés dans la partie analytique, et j'ose espérer qu'ils contribueront à faire accueillir la théorie à laquelle on doit la connaissance de ces propriétés, qui me paraissent en rendre l'étude à la fois plus attrayante et plus instructive, et qui auraient probablement échappé pour toujours à notre géométrie, si elles ne s'étaient rencontrées dans celle de la nature.

Avant d'en venir à l'objet principal de l'article suivant, qui est la théorie du cube, je donne la

[illegible] forme primitive et les [illegible] font remarquer par la [illegible] leurs angles solides, [illegible] donnent naissance à [illegible] composées que celles [illegible] au rhomboïde. Suppo- [illegible] qui agissent sur [illegible] dans lequel cette base [illegible] détermination, qui me [illegible] pour arriver à ceux qui [illegible] parties d'un cube. Les [illegible] choisies pour y appli- [illegible] les unes au plomb [illegible] fer sulfuré. Ce sont sur- [illegible] la détermination conduit [illegible] de divers genres, dont une [illegible] est celle qui se rapporte à [illegible] qui a pour faces des pen- [illegible] égaux. Plusieurs minéralo- [illegible] contraire avec le régulier [illegible] les pentagones ont tous [illegible] que sur ceux qui appar- [illegible] fer sulfuré, quatre des [illegible] le cinquième est plus [illegible] rapport avec chacun des [illegible] une différence d'en- [illegible] les pentagones situés [illegible] Il y a mieux, c'est [illegible] la tendance de décroisse-

ment qui soit susceptible de produire le dodécaèdre régulier de la géométrie, et ici se présente une réflexion : c'est que les lois de décroissement d'où dépend la forme de celui qui appartient au fer sulfuré, sont à la fois les plus simples et les plus régulières possibles, d'où il suit qu'il doit être considéré comme étant le dodécaèdre régulier de la nature.

Vient ensuite le prisme rhomboïdal à base oblique, dont la théorie se rapproche jusqu'à un certain point de celle du rhomboïde, à l'aide d'une propriété géométrique qui est générale pour tous les solides primitifs de la même espèce. L'effet de cette propriété est de limiter celle des dimensions du prisme, qui coïncide avec l'un quelconque de ses bords longitudinaux ; de plus, elle donne naissance à d'autres propriétés, dont je déduis des formules générales applicables aux incidences des faces produites en vertu de tous les décroissemens qui peuvent avoir lieu, soit sur les bords, soit sur les angles de la forme primitive. Ces propriétés, à leur tour, exercent une influence remarquable sur les résultats de certains décroissemens, qui se combinent de manière que l'assortiment des faces qui en dérivent s'offre sous un aspect symétrique, analogue à celui d'une pyramide droite, qui ne paraîtrait pas se concilier avec les positions obliques des bases du prisme, si la théorie n'en démontrait la possibilité. Je cite

[illegible] la montrent réalisée [illegible] secondaires, dont les unes [illegible] rhomboïde et les autres au py-[illegible]

[illegible] qui a beaucoup de rapport [illegible] est le prisme rectangulaire [illegible] fait sur une arête perpen-[illegible] longitudinaux pris sur une [illegible]. Tel est celui qui fait la fonc-[illegible] primitive à l'égard des cristaux [illegible] m'a conduit à des considé-[illegible] pas omettre. Un de ces cris-[illegible] été confié à une époque où ils [illegible] rares, offrait d'un côté sur [illegible] qui ne se répétaient pas du [illegible]. Un joint perpendiculaire à l'axe, [illegible] aperçu en faisant mouvoir à la lumière une fracture qu'avait subie le cristal vers une de ses extrémités, m'avait fait croire que sa forme primitive était un prisme droit, et, dans cette hypothèse, la forme des sommets du cristal dérogeait d'autant plus à la loi de symétrie, que le nombre des faces distinctes qu'elle présentaitétait de seize, dont dix existaient sur une partie et les six autres sur la partie opposée. Des observations récentes, relatives à un autre cristal dont je donne la description, m'ont fait reconnaître l'existence d'un second joint, incliné d'environ 40 d sur le premier, et qui doit être considéré comme offrant

la véritable base de la forme primitive. En le combinant avec l'autre, on a la forme de la molécule intégrante, qui est un prisme droit triangulaire. Dès-lors le défaut de ressemblance entre les deux parties d'un même sommet s'expliquait comme de lui-même; et au lieu qu'il avait paru d'abord fournir une arme pour attaquer la généralité de la loi de symétrie, il offre aujourd'hui un des exemples les plus décisifs que l'on puisse citer en sa faveur.

Dans les articles qui suivent, je traite des formes primitives qui diffèrent du parallélépipède. La première qui se présente est le prisme hexaèdre régulier, que l'on peut considérer, d'après ce que j'en ai dit dans l'analyse de la partie synthétique, comme un assemblage de petits prismes rhomboïdaux, qui, dans les résultats des lois de la structure, s'assimilent aux molécules intégrantes données par la sous-division des parallélépipèdes dont j'ai parlé précédemment. Je donne des formules générales pour la détermination des diverses formes secondaires qui naissent des décroissemens sur les bords ou sur les angles du prisme hexaèdre. Les variétés que j'ai choisies pour y appliquer ces formules, appartiennent, les unes à l'émeraude et les autres à la chaux phosphatée. J'exposerai une considération théorique relative à la combinaison de deux décroissemens qui agissent simultanément, l'un sur les bords et l'autre sur les angles de la base

des observations qui nous la [illegible] ngées dans plusieurs formes secondai[illegible] de ce- appartiennent à l'amphibole e[illegible] elle est roxène. [illegible] de leur

Un autre prisme qui a [illegible] rempla- avec le précédent, est le [illegible] métriques oblique, dont la base n[illegible] les variétés, diculaire à deux bords l[illegible] croissemens même face latérale. T[illegible], et les qua- tion de forme primit[illegible] l'autre variété, d'euclase, dont l'étu[illegible] rapport est re- rations que je ne d[illegible] mais ici le qua- taux, qui m'avait [illegible] suite du rapport étaient extrêmem[illegible] et la hauteur du son sommet des [illegible] forme primitive. côté opposé. [illegible] rhombes, auquel je que j'avais ap[illegible] exposé détaillé que j'ai une fracture [illegible] dans la partie synthétique, ses extrémit[illegible] quatre rhomboïdes, dont primitive é[illegible] six tétraèdres à triangles pothèse, [illegible] les molécules inté- geait d'a[illegible] petits rhomboïdes qui com- nombre [illegible] les quatre dont je viens de de seize [illegible] des petits prismes rhomboïdaux six aut[illegible] en expliquant la structure récent [illegible] régulier, c'est-à-dire qu'ils la des [illegible] de molécules simples dans les ré- d'un [illegible] décroissemens qui naissent sur les pren[illegible] les angles du dodécaèdre.

, sous un même point de
és relatives aux différentes
ur forme primitive le dodé-
;it; mais en les étudiant d'une
rofondie, j'ai reconnu qu'elles se
deux systèmes de cristallisation,
lui du grenat, et l'autre celui du zinc
pose les caractères qui distinguent
es l'un de l'autre, et dont chacun dé-
relativement aux variétés qui s'y rap-
, une marche particulière des lois de la
ure. Je vérifie ce double emploi de la même
e primitive par des applications à des variétés
isies dans l'une et l'autre des espèces désignées.
usieurs de celles qui appartiennent au zinc sul-
uré sont d'autant plus remarquables, que l'influence du système de cristallisation s'y montre jusque dans ce dérangement de position qu'ont subi les cristaux que je nomme *transposés*, et qui cache ici, sous l'air d'un simple accident, le résultat d'une propriété constante du mécanisme de la structure.

Mon Traité de Minéralogie n'offrait qu'une ébauche imparfaite de la théorie de l'octaèdre. Je m'étais contenté de ramener la structure de ce solide à un assortiment de petits tétraèdres, qui offrait l'équivalent d'un assemblage de parallélépipèdes, et de faire entrevoir comment on pouvait substituer à l'octaèdre un parallélépipède

semblable à celui dont je viens de parler; mais pour remplir le but de la théorie, il fallait trouver une méthode analytique, à l'aide de laquelle on pût transformer les décroissemens relatifs à l'octaèdre en ceux qui leur répondaient sur le parallélépipède substitué. Une autre relation du même genre entre l'octaèdre et un noyau hypothétique, tel qu'un prisme droit rhomboïdal ou rectangulaire, sollicitait une seconde méthode, plus favorable que la précédente aux applications de la théorie. M. Delafosse a bien voulu, à mon invitation, se charger de ce travail; et la communication qu'il m'en a donnée, après qu'il l'a eu terminé, m'a fait connaître que mon attente n'avait pas été trompée. Ses formules joignent au mérite de la généralité celui d'être en même temps très simples. Je suis d'autant plus flatté d'associer ici ses résultats aux miens, que je ne pouvais saisir une plus belle occasion pour témoigner combien je me félicite de ce qu'un collaborateur aussi recommandable sous tous les rapports, ait été l'un de mes anciens élèves qui se soit le plus distingué par l'activité de son zèle et par la rapidité de ses progrès (1).

(1) M. Delafosse s'est formé à l'aide de l'excellente éducation que l'on reçoit dans l'Ecole normale, dont la direction a été si dignement confiée à la sagesse et aux lumières de M. Gueneau de Mussy.

Le tétraèdre régulier, qui se présente ensuite, peut être assimilé à l'un ou l'autre des sommets d'un rhomboïde, dont les angles plans sont de 120^{d} et 60^{d}, qui aurait été coupé par un plan perpendiculaire à son axe. Sa théorie rentre dans celle de ce rhomboïde, par une suite de ce que l'assortiment des molécules intégrantes tétraèdres équivaut à un assemblage de petits rhomboïdes semblables à celui dont il s'agit. Je donne des formules générales pour la détermination des résultats relatifs à cette manière de voir, et j'en fais diverses applications à des formes que j'ai choisies parmi les variétés du cuivre gris. Plusieurs de ces formes, qui, considérées relativement au nombre et aux inclinaisons respectives de leurs faces, ont leurs analogues dans l'espèce du grenat, en diffèrent sensiblement par l'aspect sous lequel se présente l'ensemble de ces mêmes faces. Je fais voir que cette différence s'explique facilement par celle qui existe entre les deux formes primitives et entre les systèmes de cristallisation qui leur appartiennent.

J'ajoute ici un article relatif au dodécaèdre composé de deux pyramides droites réunies base à base, dont j'avais fait d'abord une forme primitive particulière, qui se trouvait placée à la suite des cinq que j'ai décrites dans les articles précédens. Je motive l'idée que j'ai conçue plus récemment de lui faire changer de rôle, et à laquelle j'ai

[illegible] par un résultat de la théorie du rhomboïde, qui a ramené parmi les formes auxquelles le solide est susceptible de donner naissance.

La partie analytique est suivie de plusieurs articles, qui serviront à compléter l'ensemble de tous les résultats relatifs à la détermination des formes cristallines. Je traite, dans le premier, d'un jeu singulier de position qui a lieu dans les cristaux de diverses substances minérales, et auquel j'ai donné le nom d'*hémitropie*. A en juger d'après l'aspect sous lequel se présente chacun des cristaux dont il s'agit, on serait tenté de croire que, pendant l'instant qui a suivi sa formation, son noyau, que je suppose être un rhomboïde, aurait été coupé en deux moitiés par un plan parallèle à deux de ses faces opposées, et qu'une des moitiés étant restée fixe, l'autre aurait décrit une demi-circonférence autour du centre de ce même plan, en entraînant avec elle la matière qui l'enveloppait, et aurait fini par se trouver appliquée en sens contraire à la première moitié. J'adopte l'hypothèse beaucoup plus naturelle, suivant laquelle la cause de l'hémitropie, quelle qu'elle fût, aurait agi, pendant la formation même du cristal, sur chacune des molécules destinées à produire la moitié qui est censée avoir tourné, en sorte que le renversement apparent de cette moitié serait l'effet de celui qu'auraient subi séparément toutes les molécules dont il s'agit. Quelquefois le plan de

rotation est situé perpendiculairement à l'axe du cristal hémitrope, et alors on peut supposer, pour plus de simplicité, que la moitié de cristal qui est censée avoir tourné, ait décrit seulement un sixième de circonférence. Je substitue, dans ce cas, le mot de *transposition* à celui d'*hémitropie*, et je fais voir que le plan de rotation est parallèle à une face qui résulterait d'une loi très simple de décroissement.

Un autre accident, qui est extrêmement commun, est celui qui m'a fourni le sujet de l'article suivant. Il dépend de la manière dont les cristaux groupés paraissent se pénétrer, par une suite du croisement de leurs axes. Dans la plupart des substances, les positions relatives de ceux qui offrent cette pénétration apparente varient, pour ainsi dire, à l'infini; mais il en existe quelques-unes, telles que la staurotide, l'étain oxidé, l'arragonite, etc., qui présentent un genre d'assortiment caractérisé par la disposition respective des cristaux qui le composent, en sorte qu'elle a lieu sous des angles constans dans chacune des variétés auxquelles elle appartient. Dans toutes les modifications de ce genre, sans en excepter celles dont j'ai parlé d'abord, on peut toujours concevoir, à l'endroit où se fait la jonction des cristaux composans, un plan dont la position est parallèle à celle d'une face qui serait produite en vertu d'une loi de décroissement ordinairement simple, au moins

[illegible] l'une des [illegible] plusieurs [illegible] la théorie [illegible] cette loi.

[illegible] problèmes que [illegible] pris pour don-[illegible] primitives, que [illegible] avance. Le but que [illegible] dont je vais pré-[illegible] connaître la mé-[illegible] connaissance. J'ob-[illegible] mesures mécaniques des [illegible] faces de la forme [illegible] secondaires, et dont [illegible] les dimensions dont [illegible] rigoureuses, et que les [illegible] dont elles sont affec-[illegible] rement aux rapports [illegible] après avoir mesuré suc-[illegible] reprises un même angle, [illegible] qui en dérivent, on trou-[illegible] différences dont les [illegible] les autres en moins; et [illegible] ces rapports seront re-[illegible] nombres, dont l'usage [illegible] théorie et la rendra moins [illegible] comment je suis arrivé à [illegible] approximatifs et com-[illegible] se reconnaît à sa simpli-

cité, et dans laquelle réside très probablement le véritable rapport, qui est celui de la nature. La méthode réunit ainsi au mérite de l'uniformité, qu'elle emprunte de sa marche, celui de cette simplicité qui caractérise ses résultats. De là résulte cet avantage que si plusieurs observateurs, qui auraient mesuré tour à tour un même angle, se dirigeaient d'après cette méthode, ils arriveraient à la même limite; au lieu que s'ils se réglaient sur les indications pures et simples de leurs mesures, les rapports auxquels ils seraient parvenus, comparés entre eux, se nuiraient l'un à l'autre par leur discordance.

Je place ici quelques résultats relatifs à un genre d'altération que subissent les variétés qui appartiennent à diverses espèces, par l'effet d'une cristallisation précipitée; il consiste en ce que certaines faces se sont infléchies de manière à devenir convexes, et quelquefois la courbure s'étend sur toute la surface. Dans plusieurs cas, les traits de la forme originale, en se laissant entrevoir à travers les altérations dont il s'agit, permettent d'en ébaucher la détermination, lorsqu'on manque de cristaux assez réguliers pour l'obtenir avec précision. Je cite une variété de chaux sulfatée, qui s'arrondit par degrés, en allant d'un individu à l'autre, et finit par s'offrir sous la forme d'une lentille, et quelquefois sous celle d'un cône régulier. La division mécanique de ce cône, faite par un plan

lorsque le groupement se rapp[illegible] joint substances désignées ci-dessus. [illegible]le d'une exemples de la marche que d[illegible]mé le nom pour arriver à la détermin[illegible]sent à cette

Dans toutes les soluti[illegible] dans les renferme la partie anal[illegible]rait entière-nées les dimensions d[illegible] décroissemens, j'ai supposées être c[illegible] rapport, de je me suis proposé [illegible] senter l'analyse [illegible] de la partie analy-thode qui m'a [illegible] de remarquer com-serverai d'ab[illegible] considéré la Cristallo-angles que [illegible] adoptée plusieurs primitive [illegible] juste célébrité. Je suis on dédu[illegible] constante des faits, et je les j'ai par[illegible] pouvaient aller, sans me petits [illegible] limite à laquelle ils s'ar-tées [illegible] primitives et celles des molé-do[illegible] sont déduites des résultats de ce[illegible] mécanique, et l'existence des lois de la o[illegible] auxquelles j'ai supposé que ces der-[illegible] soumises dans leur arrangement, [illegible] prouvée par l'accord des angles mesurés avec les angles calculés.

Les savans dont j'ai parlé ont pris en quelque sorte la route opposée. L'arbitraire des détermi-nations qu'ils ont données de la forme primitive d'un même minéral, et qui sont en partie fondées sur l'observation et en partie fictives, se montre

.. qui existent entre elles sous
.rt. Les molécules intégrantes et
ucture sont comme si elles n'exis-
..c passage aux formes secondaires est
par des sections faites dans la forme
ve, qui substituent des surfaces planes,
. le niveau est purement idéal, à l'assortiment
des bords ou des angles solides de molécules, qui termine au dehors le mécanisme de la structure. La considération de ce mécanisme se borne à un simple rapport entre les dimensions de l'espace qu'il occupe.

L'avantage qu'ont les formules analytiques, de simplifier la détermination des formes secondaires en la généralisant, et de représenter les propriétés qui semblent leur donner un langage, disparaît dans l'usage d'une méthode technique de calcul, dont les principes tendent à réduire les corps qui portent le plus visiblement l'empreinte du travail de la nature, à la condition des solides géométriques, dont on a dit avec raison qu'ils ne sont que les fantômes des corps physiques.

Lorsque j'ai commencé à m'occuper de la détermination des formes régulières sous lesquelles une partie des substances minérales s'offrent à nos observations, je n'avais considéré mon travail que comme un moyen de donner une extension à la physique des corps naturels, en faisant de la géométrie des cristaux, qui jusqu'alors n'avait

perpendiculair[illegible] épars, naturel, dont [illegible] la dé- courbe à laq[illegible] de ceux d'*hyperbole*. [illegible]
indication; [illegible] les applica- quels j'en[illegible] que l'on avait ment étr[illegible] se placer, d'a- qu'il est [illegible] ceux qui fai- se prête[illegible] tandis qu'ail-

Avan[illegible] éloignés l'un de tique, [illegible] adoptées, se bien [illegible] théorie.

grap[illegible] dans l'origine sava[illegible] des formes par[illegible] molécules, pou- ai [illegible] d'avantage pe[illegible] à laquelle ré[illegible] après cette der- c[illegible] Traité de Mi- l[illegible] que j'ai pu- [illegible] vers les [illegible] distribution métho- [illegible] les oc- [illegible] en plaçant [illegible] variétés de [illegible]

[illegible]

ce n'est pas sur les principes de la théorie, considérée comme un moyen de représenter, à l'aide du calcul analytique, la marche de la cristallisation dans la production des formes régulières auxquelles elle donne naissance : ce que l'on a contesté à cette même théorie, c'est la justesse de ses applications à la méthode. Le but que je me suis proposé dans la troisième partie du Traité de Cristallographie que je publie aujourd'hui, a été de donner un grand développement aux considérations sur lesquelles est fondée la préférence que cette science me paraît mériter d'obtenir, pour donner des points fixes aux espèces, comme étant la seule dont les résultats, liés étroitement à la forme invariable des molécules intégrantes, se dérobent à l'influence des causes accidentelles qui altèrent l'unité de composition. Ces mêmes résultats deviennent par là susceptibles de cette détermination précise et rigoureuse d'où naissent l'évidence et la conviction qui en est la suite nécessaire.

Cette troisième partie est composée de neuf articles, dont je vais donner successivement les analyses.

Dans celle qui se présente d'abord, je remonte à la naissance des minéraux, et je déduis de ce qui se passe pendant la première époque de leur formation la définition de l'espèce minérale, dans laquelle je fais entrer non-seulement les qualités et les quantités respectives de leurs élémens, mais

[illegible] ces derniers exercent les [illegible] ce qu'on doit entendre [illegible] pas voir combien elles in- [illegible] constitution physique des minéraux.

[illegible] à la Cristallogra- [illegible] à distinc- [illegible] principalement [illegible] exige que [illegible] être remplie [illegible] dépeint [illegible] nature, et [illegible] qu'à [illegible] ont effacé [illegible]

[illegible] suivans, j'expose les [illegible] cristallisation, pour la [illegible] d'abord ceux [illegible] pour base [illegible] parallélépi- [illegible] formes se- [illegible] particuliers, [illegible] parler, [illegible] base carrée, [illegible] empruntent [illegible] suf- [illegible] incompatibles [illegible]

[illegible] appartiennent à [illegible] telles que

deux rhomboïdes de différentes mesures d'angles, sont encore susceptibles, au moins dans certains cas, de fournir des caractères distinctifs. C'est ce qui a lieu lorsqu'en comparant ces formes, prises dans leur ensemble, on observe parmi celles qui dérivent, par exemple, de tel rhomboïde primitif, les résultats de certains décroissemens, lesquels ne se rencontrent pas parmi celles qui se rapportent à un autre rhomboïde, ou réciproquement. Les molécules intégrantes de chaque rhomboïde semblent être douées d'une faculté élective, qui détermine en elles une tendance particulière vers certaines lois et une sorte d'indifférence pour d'autres lois, quoiqu'aussi simples ou même plus simples que les premières. Je cite divers exemples qui confirment cette manière de voir.

Le quatrième article a pour but la solution d'une difficulté que l'on a opposée à la méthode de classification fondée sur la Cristallographie. Elle est tirée de ce que cette méthode, dans un certain nombre de cas, assigne une même forme primitive, et par suite une même forme de molécule, à des espèces minérales très différentes. Je me bornerai ici à indiquer sommairement les considérations qui me paraissent fournir la réponse, et auxquelles je donne un grand développement dans l'article relatif à ce sujet. J'avais observé depuis long-temps que les formes communes à diverses espèces sont de celles qui offrent comme

aussi les fonctions [illegible] et l'oc-
uns sur les autres [illegible] emment,
par ces fonctions [illegible] le vue de
fluent sur la co[illegible] corréla-
Je prouve [illegible] à côté de
phie plutôt [illegible] la consé-
tion des es[illegible] ent se ren-
sur ce que [illegible] nature. Par
l'espèce [illegible] autres formes
que par [illegible] qui la présente.
les mi[illegible] est liée au même
non [illegible] stance connue
l'aide [illegible] ant la formation
leur [illegible] voir que l'opinion
I[illegible] qui ont été émises
av[illegible] figure du rhom-
di[illegible] montre le minéral
[illegible] une de ces opéra-
[illegible] *morphoses*, à l'aide
[illegible] substitue on ne sait
[illegible] évident, à une sub-
[illegible] emprunte en même
[illegible]

[illegible] ce me semble, une
[illegible] ont les résultats
[illegible] de la chimie, pour
[illegible] Je veux parler des di-
verses [illegible] d'un même miné-
ral, [illegible] pris dans différentes

localités. J'explique ces diversités, en considérant que le liquide dans lequel étaient suspendues les molécules destinées à former des cristaux de tel minéral, renfermait en même temps celles d'une ou plusieurs substances étrangères, dont une partie s'est interposée entre les premières, sans nuire à leur tendance pour obéir aux lois de leur propre cristallisation. Je développe les considérations qui naissent de cette cause de divergence entre deux sciences, dont l'une opère souvent sur des mélanges, tandis que pour l'autre tous les minéraux sont purs. J'expose un résultat remarquable qui sert à préciser l'idée que l'on doit attacher au mot de *mélange*, et auquel le célèbre Berzelius a été conduit par ses belles recherches sur la composition des minéraux, ramenée au principe des proportions définies. Il consiste en ce qu'il est possible que les molécules dont un minéral est mélangé, forment, par leur réunion, un ou plusieurs composés particuliers, sans que le minéral cesse de se montrer sous la même forme. Dans d'autres cas, la combinaison intime de toutes les molécules qui ont concouru à la formation du minéral constitue une espèce distincte, et cette circonstance est encore indiquée par le changement qu'a subi la forme, et qui lui imprime un caractère distinctif. Je cite divers exemples relatifs à ces différens cas, et je termine par celui

auquel se rapportent certains minéraux, qui sont des assemblages de plusieurs composés, dont chacun pourrait exister ou même existe séparément, en sorte qu'il se trouve classé dans la méthode sous le nom qui lui convient. Les chimistes ont évité l'embarras du choix, en considérant ces assemblages comme produits par une combinaison unique, à laquelle ont contribué les molécules de tous les composés, et d'où résulte une espèce toute particulière. Mais la Cristallographie prouve qu'ils ne sont encore unis que par voie de mélange, et que c'est l'un d'eux qui communique à l'ensemble le caractère de sa propre forme; d'où il suit que c'est lui qui détermine l'espèce à laquelle appartient le minéral.

Le but que je me propose dans le huitième article est de disculper certains résultats de la Cristallographie du reproche de ne pas s'accorder avec ceux de l'analyse chimique. Tel est le cas où deux substances dans lesquelles la forme de la molécule intégrante est absolument la même, et de plus n'est pas une limite, ne diffèrent que par le rapport de leurs principes composans, tel que le donne l'analyse. Dans le même cas, les indications des caractères physiques viennent à l'appui de celles qui se tirent de la forme cristalline; d'où je conclus que si le principe des proportions définies paraît s'opposer au rapprochement des deux

substances, c'est l'effet d'une de ces anomalies de l'analyse, dont on pourrait citer de nombreux exemples.

Avant d'en venir à l'objet principal du neuvième article, j'expose les diverses circonstances qui se présentent successivement, lorsqu'en parcourant le globe, on observe à la fois la nature des roches dans lesquelles sont engagés des cristaux, dont la formation a eu lieu simultanément avec celle de ces roches, et les formes sous lesquelles ils se montrent. Parmi ces circonstances, il en est une qui paraît être inattendue, et sur laquelle je m'arrête de préférence, comme offrant une nouvelle preuve d'autant plus remarquable des avantages de la Cristallographie, relativement à la distinction des espèces minérales, que cette science a ici à lutter en même temps contre la méthode dont l'analyse fournit les bases, et contre celle qui est fondée sur le témoignage des sens, et dont le célèbre Werner est l'inventeur.

La circonstance dont il s'agit est celle où des substances situées dans des terrains très différens, et entre lesquelles le contraste des caractères extérieurs a indiqué une ligne de séparation dont l'analyse paraît avoir confirmé l'existence, viennent se toucher, par la ressemblance parfaite qu'ont entre elles les formes de leurs molécules intégrantes. Je choisis pour exemples des variétés

auquel se rappo[illegible], l'amphi-
des assemblag[illegible] des espèces
cun pourrait [illegible] comparant
en sorte qu'i[illegible]stances dont
sous le non[illegible] méthode por-
évité l'em[illegible] leur forme est
semblage[illegible]n de lois de
unique, [illegible]mmunes, et dont
tous le[illegible] neuf. Le refus
toute [illegible] rend inexplicable
qu'ils [illegible] s'être cherchées
et q[illegible] corps qui leur
sem[illegible] autres cas, ce n'est
suit [illegible]semens, que ce
ap[illegible] de l'identité des
[illegible] L'électricité acquise
ti[illegible] existe, comme cela a
t[illegible] sont ses indications à
[illegible] de la structure. Une
[illegible] ne saurait être l'effet
[illegible] entre les minéraux
[illegible] démontrer la né-
[illegible] méthode, pour que la
[illegible] avec elle-même.

[illegible]ixième, est un ap-
[illegible]ographique, qui com-
[illegible] des altérations que
[illegible] minéraux, d'un individu

à l'autre, en passant insensiblement de l'état de cristallisation régulière et nettement prononcée, qui les montre dans toute leur perfection, à celui où elles n'en offrent plus aucune trace, et où le minéral prend le nom de compact. J'indique un certain nombre de caractères, dont la plupart sont tirés des propriétés physiques, et quelques-uns des propriétés chimiques, qui peuvent servir à faire reconnaître les minéraux, lorsqu'ils se refusent à l'application des caractères géométriques. Je me borne à ceux qui sont encore inédits, ou qui se trouvent épars dans différens Mémoires que j'ai publiés depuis quelques années, mon but n'étant que de donner quelques exemples des moyens qui me paraissent mériter d'être employés de préférence, pour suppléer, jusqu'à un certain point, à l'absence de la forme, comme étant inhérens aux molécules intégrantes.

Le onzième article, qui est le dernier, renferme une histoire abrégée des progrès qu'a faits la Cristallographie depuis environ trente ans, soit en reculant les limites de la théorie, par de nouvelles applications des lois de la structure, soit en remplissant des vides sur le tableau de la méthode, par de nouveaux résultats relatifs à la distinction des espèces. Un des plus remarquables parmi ces derniers, qui est très récent, est celui qui se rapporte au cuivre dioptase et au cuivre

de trois minéra [illegible]
bole et la tourn [illegible] nt re-
distinctes sous [illegible] morphe,
des cristaux p [illegible] le com-
je viens de p [illegible] de leurs
tent le même [illegible] qui se dé-
modifiée par [illegible] sont in-
décroisseme [illegible]
le nombre [illegible] aux pro-
d'admettre [illegible] ceux qui
ce concou [illegible] degré de
pour aller [illegible] primitives,
ont servi [illegible] cristaux plus
pas tant [illegible] avaient servi
qu'ils ont [illegible] dois ici un
corps qu [illegible] de Monteiro,
par la [illegible] à l'avan-
lieu dan [illegible] à laquelle il
celles [illegible] goniomètre.
ressem [illegible] il me res-
d'une [illegible] autres ont subi
qui la [illegible] nécessaires :
cessité [illegible] à l'égard du
nature [illegible] épidote.
L'ar [illegible] Monteiro de me
pendic [illegible] les anciennes
mence [illegible] à lui-même
subiss [illegible] deux nouvelles
[illegible] la cristallisation

a caractère de symétrie qui a fixé
Je choisirai, comme exemple, celle
entée la dernière à son observation.
e dont il s'agit consiste en ce que les
s de certaines faces, avec celles qui
adjacentes vers un même sommet, sont
s entre elles. M. de Monteiro représente
binaison des lois de décroissement d'où
i ce caractère, par une formule générale,
s laquelle on détermine immédiatement dans
que cas particulier la loi relative aux faces qui
ent l'empreinte du caractère. Je me dispense-
i d'autant plus d'entrer à cet égard dans de plus
grands détails, que deux Mémoires, où le savant auteur a développé lui-même les résultats auxquels il est parvenu, ont été publiés dans un ouvrage périodique très connu (1), à l'aide duquel ceux qui sont en état d'apprécier ces résultats ont pu juger par eux-mêmes de tout l'intérêt que mérite d'inspirer le travail qui en est l'objet.

J'ai déjà parlé de l'avantage qu'ont les projections des formes cristallines d'en faciliter l'étude; mon but, dans la quatrième partie de cet ouvrage, a été d'exposer la méthode qui m'a paru la plus simple pour tracer ces sortes de portraits de

(1) Journal des Mines, vol. XXXIV, pag. 161 et suiv., et Annales des Mines, 1820.

hydraté silicifère, que [illegible]
gardé comme n'en étant [illegible] lement
et qui s'en rapproche [illegible] ent servi
parc les deux substan[illegible] çu l'idée
formes cristallines, [illegible] occuper de
duit de cette com[illegible] objets, et
compatibles dans u[illegible] que les

Parmi les résul[illegible] t, n'a été
grès de la Cristall[illegible] de mes élèves
ont eu pour but [illegible] des projections,
justesse à la dé[illegible] me propose de
à l'aide des m[illegible] avec le déve-
nettement [illegible] les cristallo-
à mes prem[illegible] aux formes cris-
hommage [illegible], dont ils se
pour la b[illegible] descriptions accom-
tage de [illegible]
est par[illegible] une méthode qui
Plusieu[illegible], et à laquelle
tait d[illegible]. Elle consiste
de p[illegible] une surface plane,
telles [illegible] paraissent à une
feld- [illegible] On suppose qu'il

M[illegible] plan situé verti-
four[illegible] *idéal*, et le but
app[illegible] ce plan un dessin
de [illegible] avec l'objet, que
va[illegible] par ses différens
[illegible] directions que s'ils

nt de cet objet. Il est clair au fond de l'œil par les pre- exactement semblable à celle raient fait naître. Car tout dé- ue gardent entre eux les rayons ils entrent dans l'œil. Le reste se son insu.

r exposé les causes de l'illusion que perspective, je ferai connaître la mé- projections que j'ai adoptée de préfé- ur remplir le même objet. Elle ne diffère perspective qu'en ce que l'objet auquel elle pporte est censé être vu à une distance infi- ensorte que les rayons partis de ses différens oints sont parallèles entre eux. On verra que si elle représente les formes cristallines sous un aspect moins séduisant, elle a sur l'autre l'a- vantage d'être plus favorable à leur étude.

Cette méthode, considérée dans ses applica- tions, suit une marche particulière, assortie à son objet. La géométrie descriptive, dont le célèbre Monge est le créateur, et dont il a fait de belles et nombreuses applications à la pratique de divers arts qui servent si utilement la société, refuse de se plier aux besoins de la Cristallographie. La première des opérations qu'elle exigerait aurait pour but de représenter immédiatement, sur un plan horizontal, la forme d'un cristal souvent



[illegible] divers sens, dont le [illegible] une variété de fer [illegible] parallélique. Une opéra- [illegible] serait propre qu'à rebu- [illegible] aurait entreprise, par le [illegible] et fastidieux dans lequel [illegible]. L'autre méthode suit une [illegible] accessible, indiquée par la [illegible] est soumise la structure [illegible] de la forme du noyau, qui [illegible] et c'est son image que trace [illegible] sur le plan dont j'ai parlé. Cette [illegible] de deux autres, dont je don- [illegible] détaillée, et dans lesquelles [illegible] des différens points de l'ob- [illegible] par degrés aux directions con- [illegible] que l'image produite par les [illegible] censés laisser de leur passage à [illegible], se présente sous l'aspect qui [illegible] positions respectives de l'objet [illegible]

[illegible] sur la projection de la forme [illegible] à l'aide des opérations dont je [illegible] idée, que l'on en déduit im- [illegible] formes secondaires qui naissent [illegible] sur ses bords et sur ses angles. [illegible] par trois méthodes différentes. [illegible] construire sur le noyau les faces

des formes dont il s'agit, en y faisant passer des plans coupans dont les positions sont indiquées par les lois de décroissement d'où dépendent ces faces. Les intersections des plans dont il s'agit répondent aux arêtes du cristal qui sert de modèle, et l'on a les données nécessaires pour en tracer séparément le dessin sur le même papier, en menant des parallèles aux intersections désignées.

Une seconde méthode, à la fois plus simple et susceptible d'une plus grande précision, mais qui ne peut être employée que dans certains cas, est fondée sur les propriétés géométriques de la forme proposée. Les rapports que donne le calcul entre les dimensions de cette forme, indiquent les directions des principaux traits du dessin qui doit en offrir l'image, et le reste se présente comme de lui-même.

La troisième méthode est analogue à la manière de considérer un cristal de forme secondaire, en y distinguant deux parties, l'une constante, qui est le noyau, l'autre variable, qui est la matière enveloppante. On laisse subsister la projection de ce noyau, et l'on trace autour de lui les faces qui résultent des décroissemens sur ses bords ou sur ses angles. Il en résulte que la totalité du dessin représente ce noyau engagé dans la forme secondaire, conformément à la marche de la structure.

J'ai présenté les résultats des applications que

j'ai faites des trois méthodes que je viens d'exposer, à plusieurs variétés de formes, choisies parmi celles que présentent la chaux carbonatée, le pyroxène, la baryte sulfatée, l'émeraude, le cuivre gris, la chaux sulfatée et le grenat. Il sera facile de se faire une idée de la marche que j'ai adoptée pour chaque opération, comme étant celle qui m'a paru la plus simple, en la suivant de l'œil à l'aide de la figure qui en offre le développement et la description détaillée que j'en ai donnée.

J'ai été dans le cas de résoudre un problème d'un autre genre, dont j'ai fait un grand usage. Le but que je m'y suis proposé était de répéter les opérations relatives à des figures de cristaux tracées par une main étrangère. Pour y parvenir, il fallait remonter à la naissance de ces opérations, et reproduire cette image du noyau dont j'ai parlé ci-dessus, telle que l'avait dessinée l'auteur sur un plan horizontal. J'indique un moyen mécanique de la retrouver facilement à travers les traits de la projection qui en a été déduite à l'aide d'une opération ultérieure.

Je remarquerai, en terminant cet article, que le sujet dont j'offre l'exposé étant susceptible d'une infinité de variations, on ne peut prescrire aucune règle générale sur la marche à suivre dans les opérations qui s'y rapportent. Les exemples que j'ai donnés serviront à initier celui qui les

aura bien conçus dans la pratique d'un art qui n'a point de terme; le reste dépendra de l'exercice et du travail. Souvent une étude attentive de ce qui a été fait, donne des idées sur la manière de se conduire dans ce qui se présente à faire, et rend ingénieux à se créer de nouveaux moyens d'application à mesure que le sujet s'offre sous de nouvelles faces.

Je n'ai rien négligé pour n'omettre dans ce Traité de Cristallographie aucun des moyens qui peuvent être employés à la détermination des formes cristallines, considérées sous le double rapport de la théorie et de la méthode. En profitant, pour remplir mon but, des résultats que j'avais insérés dans mon Traité de Minéralogie, je leur ai donné un grand développement et j'y ai fait des additions considérables. A plus forte raison ai-je lieu de craindre que mon nouvel ouvrage ne fasse renaître les réclamations que l'autre a excitées. On m'avait objecté que tous ces calculs, auxquels je paraissais attacher tant d'importance, ne servaient qu'à rendre la Minéralogie inaccessible pour une grande partie de ceux qui se proposeraient de l'étudier; qu'elle devait se suffire à elle-même, et que la Géométrie n'était entrée pour rien dans l'enseignement des hommes justement célèbres qui avaient fait faire de si grands progrès à la science, en se rendant clairs et intelligibles pour toutes les classes d'élèves. La meilleure ré-

j'ai faites des trois m[illegible] qui seraient ser, à plusieurs vari[illegible], est de leur celles que présente[illegible] eu le courage de roxène, la baryte [illegible] d'abord rencon- gris, la chaux su[illegible] devant eux de se faire une i[illegible] le terme, et ont pour chaque o[illegible] une étude appro- m'a paru la p[illegible] plus propres à exer- l'aide de la fi[illegible] à le meubler de con- la descripti[illegible] et utiles.

J'ai été
d'un autr
but que
opérati
cées p
fallait
et rep
ci-de
un p
que
de
op

le
d'
a
l
q

[illegible] ce moment doit servir à [illegible] au Traité de Mi- [illegible] la seconde édition, à [illegible] ans. Ce Traité qui, je [illegible] d'égards, sera composé [illegible] atlas in-4°. L'impression [illegible] par les soins éclairés de MM. Ba- [illegible] auxquels j'ai donné toute ma [illegible] madame Courcier.

TABLE ALPHABÉTIQUE
DES MATIÈRES
CONTENUES DANS LES DEUX VOLUMES.

(Les chiffres romains indiquent les tomes, et les chiffres arabes les pages.)

ponse que l'on
tentés de ren
opposer l'exe
franchir les d
trées sur une
à mesure qu
fini par se
fondie d'un
cer la saga
naissances

---

(1) L'O
la fois d'i
néralogie,
laquelle j
l'espère,
de quatr
en est c
chelier
confian

... ment di-

... espèces

... en minéra-

... considéré comme
... division méca-
... , I, 47. — Sa

... structure dé-

... , II, 409. Manière

... , I, 241.
... ainsi dénommée,

... modifications réelle-
... offre un nouveau
... et les plantes, I, 5.
... en général, I, 6; leurs
... I, 27. Des arrondisse-
... également acciden-

... , II, 548.
... plus ordinairement dans
... polyèdres réguliers de la
... la détermination des an-
... rhomboïde, I, 566.
... I, 44.
... les reconnaître à l'aide de la
... Moyen de déterminer leurs di-
... II, ... communes à plusieurs es-
... II, ...

[illegible] DES MATIÈRES.

TRAITÉ

DE

CRISTALLOGRAPHIE.

PARTIE SYNTHÉTIQUE.

IDÉE GÉNÉRALE DES MINÉRAUX, ET DES CARACTÈRES QUI LES DISTINGUENT DES ÊTRES ORGANIQUES.

1. L'ASSEMBLAGE de tous les êtres qui habitent la surface du globe ou en occupent l'intérieur, a été partagé en trois grandes sous-divisions, dont chacune est distinguée des autres par des caractères qui lui sont propres. A la première appartiennent les animaux, qui, jouissant à la fois d'un principe de vie et de la faculté de sentir, dirigent à leur gré les divers mouvemens auxquels se prête l'admirable combinaison des organes dont ils ont été pourvus. Dans la seconde sous-division se rangent les plantes, qui ont aussi reçu en partage un principe de vie, mais qui sont privées de sentiment et de mouvement spontané. La troi-

des
autre,
d'une
ont que
es entre
istes ont
capable
tous les au-
le plus beau
puisque c'est
minéraux, éta-
règnes une
les animaux et
par le déve-
parties de l'indi-
reçoivent les or-
minéraux s'accrois-
juxta-position de
surface. Leur for-
molécules qui s'ar-
De nouvelles
solide l'enveloppent
avec lequel elle est
continue de même par
concentriques, qui se
ajoute son volume à
les différences que pré-

raux comparés aux animaux et aux
ant de ceux-ci, qu'ils ont une organi-
autres, qu'ils n'ont qu'une structure :
niers, l'organisation suppose une combi-
rces sans cesse en activité, un jeu con-
toutes les parties internes qui, par des
diversifiées, concourent à la conservation
vidus. Le mécanisme de la structure au con-
se borne à un arrangement uniforme de molé-
que l'affinité fixe à mesure qu'elle les amène, et
lle tient ensuite enchaînées les unes aux autres;
si elles ont des mouvemens, ils sont accidentels,
t se réduisent aux oscillations imperceptibles qu'occasionne dans ces molécules l'inconstance de la température, en faisant varier d'un instant à l'autre le rapport entre la force du calorique qui tend à les écarter, et celle de l'affinité qui agit pour les rapprocher.

3. Les minéraux composés, comme je l'ai dit, d'une matière morte, n'ayant ni physionomie ni langage, paraissent au premier abord, n'offrir qu'un léger degré d'intérêt aux personnes qui se proposeraient de les étudier, en comparaison de celui qu'inspirent les productions des autres règnes. Les animaux qui se rapprochent de l'homme par leur conformation, et dont une partie vit, pour ainsi dire, en société avec lui, semblent lui présenter un sujet d'étude beaucoup plus attrayant. L'aspect seul des plantes, qui se montrent de toutes parts à la surface de la terre dont

sième division, placée à une plus [illegible] te à précédentes que celle qui les sé[illegible] brutes est remplie par les minéraux, qu[illegible] dans matière brute, insensible, in[illegible] parallèle des assemblages de molécu[illegible] elles par cette force à [illegible] donné le nom d'*affinit*[illegible] rap- d'étudier la nature, pl[illegible] font tres êtres à l'aide de [illegible] parce présent qu'il ait reçu [illegible] métamor- par elle qu'il en dev[illegible] régu-

2. La manière d[illegible] d'être blit entre eux et [illegible] soit par- nouvelle ligne d[illegible] liés à des dans les plante[illegible] fondées sur loppement sim[illegible] l'électricité et vidu, à l'aid[illegible] grand nombre ganes destin[illegible] d'être connus, sent au co[illegible] les plie aux be- particules [illegible] soit enfin parce que mation co[illegible] respectives dans rangent [illegible] nouvelle branche molécule[illegible] beaucoup à l'intérêt en se fix[illegible] lorsqu'on les étudie en conta[illegible] une suc[illegible] superpo[illegible] celui du[illegible]

[illegible] cristallines.

On [illegible] faite des minéraux [illegible] considérés comme [illegible] laires, liées entre

nies par l'affinité. Ces molécules, ainsi que nous le verrons plus bas, ont des formes également remarquables par leur régularité et par leur simplicité. Or, lorsque celles qui appartiennent à un minéral sont suspendues dans un liquide, et qu'ensuite ce liquide, soit en s'évaporant, soit par quelque autre cause, les abandonne à leur affinité réciproque, et de plus lorsqu'aucune force perturbatrice ne gêne cette affinité, les molécules en s'unissant les unes aux autres par les faces les plus disposées à cette réunion, composent, par leur assemblage, des corps réguliers terminés par des faces planes, et analogues aux solides de la Géométrie. Ce sont ces corps que l'on a nommés en général *cristaux*, quelle que soit la substance qui en ait fourni les matériaux.

5. Ici se présente une nouvelle différence bien remarquable entre les minéraux et les êtres organiques. Si l'on parcourt ces parterres où se trouvent rangées dans un ordre si bien assorti aux rapports naturels, les richesses végétales de tous les pays du monde, on y voit que tous les individus d'une même espèce se ressemblent par leur forme, en sorte que toutes les fleurs ont leurs étamines et leurs styles en même nombre, et disposés de la même manière. On peut en dire autant des pétales, des folioles du calice; et la ressemblance s'étend jusqu'à la forme des tiges et à la disposition générale des feuilles; les différences, s'il en existe, ne tiennent qu'à des nuances de port, de grandeur, de couleur, en sorte que l'on

peut dire que celui qui a vu un seul individu, a vu l'espèce entière. Dans le règne minéral au contraire, les cristaux qui appartiennent à une même espèce présentent souvent des formes qui sans cesser d'être régulières, diffèrent plus ou moins sensiblement les unes des autres, soit par le nombre, soit par les positions respectives de leurs faces. J'en citerai, dans la suite de nombreux exemples, et nous verrons même que parmi les formes dont il s'agit, il en est qui n'offrent aucun trait de ressemblance, et paraissent être entièrement étrangères les unes à l'égard des autres.

Ces contrastes sont d'autant plus propres à exciter la surprise, que les formes qui les présentent portent l'empreinte d'un travail géométrique, et ont ce caractère de régularité qui semble emporter avec lui l'idée de constance et d'uniformité. Le but principal de cet Ouvrage est d'éclaircir le paradoxe qui naît de ces contrastes, et de montrer qu'au milieu de tous ces résultats dont chacun semble donner au travail de la nature un air de nouveauté sous lequel on serait tenté de ne la plus reconnaître, elle ne cesse point d'être semblable à elle-même.

Division des formes cristallines considérées en général.

6. Le point de vue auquel je me suis proposé de ramener l'étude des corps réguliers que produit la cristallisation, m'a paru exiger que la définition et la no-

menclature de ces corps fussent fixées d'une manière assortie à la solution des problèmes, dont ils offrent les sujets.

7. Les figures des faces qui composent la surface des cristaux, conserveront les dénominations de *triangle*, de *carré*, de *rhombe*, de *trapèze*, etc., qu'elles portent dans la Géométrie ordinaire, ainsi que celles de *triangle équilatéral*, *isocèle*, *scalène*, etc., de *parallélogramme rectangle*, *obliquangle*, etc., que l'on a données à leurs diverses modifications.

Une face est dite, en général, être *verticale*, *horizontale* ou *oblique*, suivant que sa direction déterminée par la position naturelle du cristal, est celle qu'indique l'une ou l'autre des dénominations qui viennent d'être énoncées.

Les lignes qui terminent les faces d'un cristal portent le nom de *bords* ou de *côtés*. On donne plus particulièrement le nom d'*arêtes* aux mêmes lignes, lorsqu'on les considère comme situées à la rencontre de deux faces. On dit d'une arête qu'elle est *verticale*, *horizontale* ou *oblique*, en prenant ces mots dans le même sens que pour les faces.

8. On distingue dans les cristaux trois sortes d'angles : les *angles plans*, ou ceux qui sont formés par deux bords adjacens sur une même face; les *angles saillans*, ou ceux que font entre elles les faces qui se réunissent deux à deux sur une même arête; et les *angles solides*, ou ceux qui résultent du concours de plus de deux angles plans. Un angle solide est trièdre,

tétraèdre, pentaèdre, etc., suivant qu'il est composé de trois angles plans, de quatre, de cinq, etc.

Les angles plans ou saillans sont égaux, lorsqu'ils ont pour mesure le même nombre de degrés. J'appelle *bords identiques* ceux qui, étant égaux entre eux, servent de ligne de jonction à des faces qui font entre elles des angles saillans pareillement égaux.

Les angles solides sont égaux, lorsque les angles plans qui les composent ont comparativement des mesures égales, et sont également inclinés entre eux.

9. J'appelle *axe* en général une ligne droite menée par le centre d'un cristal, et dont telle est la direction, que toutes les parties du cristal sont disposées symétriquement à son égard. Un des principaux caractères de cette symétrie dépend de ce que les lignes menées perpendiculairement sur l'axe, en partant des angles solides égaux et situés sur les parties environnantes, sont égales entre elles. Un même corps est souvent susceptible d'être traversé par plusieurs lignes dont chacune peut être prise pour axe. Mais il y a, dans ce cas, un axe principal, que je nomme *axe de cristallisation*, et qui se distingue des autres, en ce qu'il est dirigé verticalement, lorsque le cristal est dans sa position naturelle. Cette position est presque toujours indiquée par l'aspect de la forme considérée en elle-même; mais les indices qui la font surtout reconnaître sont ceux qui se tirent du rapprochement des différentes formes cristallines, originaires d'une même espèce, avec l'une d'entre

elles, qui sert comme de mesure commune pour les comparer.

Ce que je vais dire des solides que considère la Géométrie des cristaux se bornera à la notion des formes qui présentent ce dernier caractère, et de celles qui sont comme les élémens dans lesquels elles se résolvent, lorsqu'on les sous-divise à l'aide d'une opération dont je parlerai dans la suite.

10. La plus simple est le *tétraèdre*, que l'on appelle communément *pyramide triangulaire*. Il est *régulier*, lorsque toutes ses faces sont des triangles équilatéraux; tel est celui que représente la fig. 1, pl. I. Il est *symétrique*, lorsque ses faces sont des triangles isocèles, égaux et semblables, *bca*, *bda*, *dac*, *dbc* (fig. 2); *hémi-symétrique*, lorsqu'étant toujours des triangles isocèles, elles ne sont égales et semblables que deux à deux, comme *bda*, *bca* (fig. 3) d'une part; et *dac*, *dbc* de l'autre; *irrégulier*, lorsqu'elles diffèrent toutes les unes des autres, ou qu'il n'y en a que deux qui soient égales et semblables. Cette préférence, donnée au mot de *tétraèdre*, est fondée sur ce que la fonction que fait le plus ordinairement ce solide, dans les produits de la cristallisation, s'accorde peu avec l'idée que l'on attache au nom de *pyramide*, et qui est celle d'un solide à quatre faces dont une que l'on considère comme la base est située horizontalement. Tel est au contraire l'aspect que présentent les cristaux dans lesquels le tétraèdre entre comme élément, qu'il détermine, rela-

[illegible] une position sous la- [illegible] est censée faire l'office de [illegible] es figures et l'assortiment [illegible] tendent à écarter encore [illegible] mide. Ainsi le tétraèdre ré- [illegible] tué de manière que deux [illegible] *ab*, *cd*, qui ont leurs direc- [illegible] entre elles, étant parallèles à [illegible] ces arêtes sont les lignes de [illegible] obliques. Quelquefois ce- [illegible] régulier s'offre d'une manière [illegible] relation de position avec celle [illegible] mais quoiqu'il paraisse rentrer [illegible] des pyramides, il conviendrait [illegible] en donner le nom, que toutes [illegible] le même cas il n'y a aucune raison [illegible] omme base l'une plutôt que l'autre.

[illegible] l'abord du tétraèdre régulier s'ap- [illegible] me je nomme *symétrique*. La fig. 2 [illegible] ces tétraèdres qui appartient au [illegible]. Les bases *ab*, *cd* des triangles isocèles *acb*, *adb*, [illegible] qui composent sa surface, font aussi entre elles des angles droits, et sont de même situées horizontalement. Mais dans le tétraèdre symétrique que l'on voit [illegible], et qui est celui du grenat, les bases *cd*, *ab* des triangles isocèles pris deux à deux, étant toujours perpendiculaires entre elles, sont inclinées à l'horizon, et l'une des deux autres arêtes, savoir, *ad*, est située verticalement, parce qu'elle se

confond avec l'axe du cristal dont ce tétraèdre fait partie.

Dans le tétraèdre hémi-symétrique de la fig. 3, et qui est celui de la topaze, les bases *cd*, *ab* des triangles isocèles ont les mêmes relations, soit entre elles, soit par rapport à l'horizon, et chacune d'elles est commune à deux triangles égaux et semblables, qui ont aussi des positions obliques.

L'axe géométrique d'une pyramide est une ligne abaissée d'un des angles solides sur le milieu de la face opposée que l'on considère comme base, et que l'on suppose située horizontalement. Il suit de là que cet axe n'est censé exister dans aucun des tétraèdres représentés par les figures 1, 2, 3 et 4. Mais tous, à l'exception de celui du grenat que l'on voit fig. 4, ont pour axe de cristallisation la ligne qui passe par les milieux des arêtes *ab*, *cd*; cette ligne étant dirigée verticalement, à cause de la position horizontale des arêtes dont il s'agit. A l'égard du tétraèdre du grenat (fig. 4), son axe de cristallisation est en quelque sorte suppléé par celui du cristal auquel appartient ce tétraèdre, et qui coïncide, comme je l'ai dit, avec l'arête verticale *ad*.

Lorsque le tétraèdre régulier existe isolément, on peut choisir à volonté pour sa base l'une quelconque de ses faces, en donnant à celle-ci une position horizontale, et la ligne verticale menée par le centre de cette base sera en même temps l'axe géométrique et celui de cristallisation.

11. Parmi les parallélépipèdes, le *cube* conserve sa dénomination. Il se trouve dans sa position naturelle, lorsque deux de ses faces opposées prises à volonté pour bases sont horizontales. Cette position détermine celle des deux axes, l'un géométrique, l'autre dit *de cristallisation*, qui se confondent en une seule ligne menée par les centres des bases.

12. Le parallélépipède dont les six faces sont des rhombes égaux et semblables *abdf*, *agqf*, etc. (fig. 5), s'appelle *rhomboïde*. Parmi les huit angles solides opposés sur ce parallélépipède, il y en a toujours deux tels que *a*, *s*, qui sont semblables et égaux, tandis que chacun des six autres est composé de deux angles égaux entre eux, et d'un troisième qui est le supplément de l'un ou l'autre des deux premiers. La ligne *as* qui passe par les deux angles semblables et égaux, est l'axe géométrique et à la fois l'axe de cristallisation du rhomboïde. Cet axe étant toujours dirigé verticalement, les points *a*, *s* qui le terminent, prennent les noms de *sommets*. Le rhomboïde est obtus ou aigu, suivant que les angles plans situés aux sommets sont eux-mêmes obtus ou aigus.

Les choses étant dans cet état, l'angle plan contigu au sommet supérieur *a*, sur l'un quelconque *bafd* des rhombes adjacens, s'appelle *angle supérieur* de ce rhombe. L'angle *d*, opposé au précédent, porte le nom d'*angle inférieur*, et les deux autres *b*, *f* s'appellent *angles latéraux*. Si l'on veut désigner les angles solides dont ces derniers font partie, on

emploie la dénomination d'*angles solides latéraux*.

On nomme *bords supérieurs* ceux qui sont de même contigus au sommet *a*, et *bords inférieurs* ceux qui sont opposés aux deux précédens. La diagonale *ad* du même rhombe, qui aboutit au sommet, est la *diagonale oblique*, et l'autre *bf* est la *diagonale horizontale*, les positions de ces lignes étant nécessairement celles qu'indiquent ces noms, quels que soient les angles du rhomboïde. Nous verrons dans la suite qu'il suffit, pour l'application de la théorie, de considérer un seul des rhombes adjacens au sommet supérieur.

On nomme *coupe principale* d'un rhomboïde, celle qui passe par deux des arêtes, telles que *af*, *sx* (fig. 6) contiguës à l'axe, et opposées entre elles, et par les diagonales obliques *fs*, *ax* comprises entre ces arêtes. La coupe transversale *lnrz* est celle qui est prise par un plan perpendiculaire aux arêtes parallèles *af*, *bd*, *xs*, *gq*. Les angles de cette coupe mesurent les incidences des faces l'une sur l'autre, et ce sont les valeurs particulières de ces incidences qui caractérisent le rhomboïde que l'on considère, et servent à le distinguer des autres solides de la même espèce.

13. Le nom de *prisme*, sans aucune désignation particulière du nombre des *faces latérales*, ou des *pans*, s'applique en général aux parallélépipèdes qui diffèrent de ceux que je viens d'indiquer.

Le *prisme quadrangulaire symétrique* est celui dont la coupe prise par un plan perpendiculaire aux

11. Parmi les [illegible] que j'appel-
dénomination. [illegible] Le *prisme*
lorsque deux [illegible] coupe trans-
pour bases son[illegible] est un rhombe,
mine celle des [illegible]sqù'elle est un
dit *de cristal* [illegible]sme prend le
seule ligne me[illegible]

12. [illegible]e par[illegible]s de considérer
rhombes égau[illegible]que la position de
s'appelle *rho*[illegible] *droit*, si cette base
posés sur ce[illegible] fig. 7 représente
tels que *a*, [illegible] appartient à la
que chacun [illegible]roit rectangulaire,
gles égaux [illegible] la fig. 9, un prisme
supplémen[illegible] parmi les cristaux de
ligne *as* q[illegible] prisme droit qua-
égaux, e[illegible]rtient à l'épidote (1).
tallisatio[illegible]éral, lorsque sa base
rigé vert[illegible] du moins sur quel-
prenne[illegible] représente un pris-
obtus [illegible] se rapporte au fer
somm[illegible] oblique rhomboïdal,

Les [illegible] la fig. 13, un prisme
conti[illegible]gulier, qui se rapporte
basd
rieur
porte
f s'a[illegible]
les a[illegible]

[illegible], d'une manière précise,
[illegible], et le rapport de leurs di-

Lorsque toutes les faces du prisme sont des parallèlogrammes obliquangles, je lui conserve le nom de *parallélépipède obliquangle*, que lui ont donné les géomètres. La figure 14 représente un prisme de ce genre, qui se rencontre parmi les cristaux de feldspath.

14. A ne considérer les divers prismes qui viennent d'être décrits, que sous le rapport de la Géométrie, on peut concevoir dans chacun d'eux trois axes différens qui passeront par les centres des faces opposées deux à deux, et si l'on place les prismes de manière que ces axes prennent successivement des positions verticales, on remarque que le changement d'aspect qui en résulte, transforme ordinairement chaque prisme en un autre désigné sous un nom différent. Par exemple si l'on suppose que dans le prisme symétrique de la méïonite (fig. 7), ce soient les faces ADFL, BCGI qui fassent la fonction de bases, ce prisme prendra le caractère de celui que j'appelle *rectangulaire*. Dans la même hypothèse, le prisme droit rhomboïdal (fig. 9) de la baryte sulfatée se convertit en prisme rectangulaire oblique, et ainsi des autres. Mais chaque prisme se trouve ramené par la considération de l'axe de cristallisation à une position fixe, qui est celle que représente la figure. Ainsi la position naturelle du prisme droit symétrique (fig. 7), est celle qui a lieu, lorsque les faces ABCD, LIGF, font la fonction de bases, parce qu'alors celles que l'on considère comme les pans sont toutes égales et sembla-

[illegible] ce qui n'aurait [illegible] pans pour bases. [illegible] de cette même [illegible] dont je viens [illegible] plus ou moins con- [illegible] le sens de l'axe qui [illegible] carrées, soit par les [illegible] fait naître sur les [illegible] nombre de celles qu'on [illegible] seul que leurs som- [illegible] même verticale.

[illegible] par elle-même aucun [illegible] position naturelle, comme [illegible] droit rectangulaire de la [illegible] les faces prises deux à deux [illegible] dimensions, il suffit de comparer [illegible] formes qui se rapportent à [illegible] suivant lequel s'est fait leur [illegible], et les positions des nou- [illegible] l'aspect, suggèrent à [illegible] véritable attitude de cette [illegible]

[illegible] différent par le nombre de [illegible] que je viens de décrire, il n'y en [illegible] rentre dans les limites du [illegible] le *prisme hexaèdre régulier*, [illegible], et a pour bases deux hexa- [illegible] le prisme *triangulaire équilatéral* [illegible] précédent, ainsi que nous verrons

plus bas. La position naturelle de ces deux espèces de prismes est trop évidente, pour qu'il soit nécessaire de l'indiquer.

15. Les octaèdres offerts par la cristallisation se rapportent en général aux cinq modifications suivantes. Dans la première, les trois quadrilatères NROL, POSN, PLSR (fig 15) que l'on peut considérer comme les bases communes des pyramides dont les sommets se confondent avec ceux des angles solides opposés de l'octaèdre, sont des carrés égaux entre eux. C'est alors l'*octaèdre régulier*, dont plusieurs espèces, telles que l'alumine sulfatée, le spinelle, le fer oxydulé, etc., offrent des exemples. Dans la seconde modification, un seul des quadrilatères, que nous supposerons être NROL (fig. 16) est un carré; les deux autres sont des rhombes égaux et semblables; il en résulte que les huit faces de l'octaèdre sont des triangles isocèles, aussi égaux et semblables, dont les bases se confondent avec les côtés du quadrilatère NROL. Je donne à cette modification le nom d'*octaèdre symétrique*. La fig. 16 représente celui du zircon, dans lequel l'incidence mutuelle de deux faces adjacentes sur les pyramides qui ont pour base commune le carré NROL est d'environ 83°. Dans la troisième modification (fig. 17), les trois quadrilatères sont des rhombes, dont chacun diffère des deux autres. Alors toutes les faces de l'octaèdre sont des triangles scalènes égaux et semblables : c'est ce que j'appelle *octaèdre rhomboïdal*. Tel est celui que présentent

... autre, et dans lequel les an-
... sont de $102^d\ 42'$, et $77^d\ 18'$,
... de deux faces, telles que
... dans les deux pyramides qui
... pour base commune, est de

... métrique, soit rhomboïdal, est
... que deux de ses faces, telles que
... prises de deux côtés opposés,
... sommet, font entre elles un angle
... Ainsi l'octaèdre symétrique de la
... et l'octaèdre rhomboïdal de la
... angle du sommet étant de 97^d dans
... dans le second.

... modification est relative à un oc-
... lequel le quadrilatère NROL (fig. 18) est
... les deux autres sont des rhombes
... entre eux. Alors les faces de l'oc-
... triangles isocèles, mais égaux et sem-
... quatre à quatre. Cette modification
... *rectangulaire*. Dans la fig. 18,
... l'octaèdre de la topaze, le côté OL
... que le côté OR ; l'incidence de OSR sur
... $\frac{1}{3}$ à peu près, et celle de OSL sur
...

... rectangulaire est *obtus*, lorsque ses
... deux à deux de part et d'autre d'un
... comme OSR et LSN, ou OSL et RSN,
... angles obtus. Il est *aigu*, lorsque

les angles dont il s'agit sont eux-mêmes aigus. Il est *semi-obtus*, lorsqu'un des angles est obtus et l'autre aigu, auquel cas les triangles qui font entre eux l'angle obtus sont toujours les plus petits, comme OSL, RSN dans le cas présent.

Dans la cinquième modification, le quadrilatère NROL (fig. 19) est un parallélogramme obliquangle, et les deux autres sont encore des rhombes égaux et semblables. Les faces de l'octaèdre sont des triangles scalènes, égaux et semblables, seulement quatre à quatre. Cette modification porte le nom d'*octaèdre irrégulier*. J'ai observé tout récemment cette forme parmi les variétés du cuivre carbonaté.

16. Il existe entre les octaèdres qui viennent d'être décrits et les divers prismes qui l'ont été précédemment, une relation que je ne ferai ici qu'énoncer, et qui reparaîtra dans le développement de la théorie. J'omets ici l'octaèdre régulier dont l'analogie avec le cube a un caractère particulier que je ferai connaître dans la suite. A l'égard des autres octaèdres, la relation dont j'ai parlé consiste en ce que parmi les prismes qui font l'office de forme fondamentale, il y en a toujours un que l'on peut ramener à l'un des octaèdres, en donnant à ce prisme des bases égales et semblables à la base commune des deux pyramides qui composent l'octaèdre, et en lui donnant un axe égal à la somme des axes des mêmes pyramides. Ainsi, l'analogue de l'octaèdre symétrique est le prisme droit quadrangulaire symétrique; celui de

souvent les cristaux [illegible] droit rhomboïdal; gles du rhombe NR [illegible] est le prisme droit et l'incidence mu[illegible] irrégulier est le LSO, PLO, adja[illegible]gulier. ont le même rh[illegible] qui passent par les 143^{d}. [illegible] Parmi ces trois

L'octaèdre s[illegible] dans un plan hori- obtus ou aigu, [illegible]ales des bases du RSO, LSN (fig[illegible] se confond avec l'axe vers un mê[illegible] et doit être aussi obtus ou a[illegible] relativement à l'oc- fig. 16 est [illegible]quefois que l'octaèdre fig. 17 est a[illegible]n sous laquelle l'axe le premier [illegible]adrilatère, dont la fi-

La quat[illegible] être dirigé horizontale- taèdre d[illegible] représente la figure 20, un recta[illegible] nitratée. Dans cet oc- égaux e[illegible]ve des faces LPO, LSO, taèdre [illegible] et celle des faces OPR, blable[illegible] 120°. Alors, l'axe de cris- se no[illegible]H, menée par les milieux qui s[illegible] NR. est p[illegible] dont il s'agit ici, comme OP[illegible] est fondé sur ce que dans OP[illegible] cette espèce d'octaèdre,

[illegible] comme les pans d'un tri[illegible] autres faces inclinées à ces m[illegible]ent, dans certains cristaux, fo[illegible] qui reposent sur les bases

du prisme. Or, l'axe du prisme et celui des pyramides ne peuvent avoir la direction verticale indiquée par la forme de ces deux espèces de solides, qu'autant que la ligne GH à laquelle cet axe est parallèle prend la même direction.

18. Parmi les différens dodécaèdres que produit la cristallisation, il y en a deux dont les formes rentrent parmi celles qui sont l'objet de cet article. L'un est le dodécaèdre *rhomboïdal* EI (fig. 21) dont toutes les faces sont des rhombes égaux et semblables. Cette forme appartient au grenat et au zinc sulfuré. Elle n'est pas susceptible de plus ou de moins dans les inclinaisons mutuelles de ses faces adjacentes, qui sont toutes de 120°, par une suite nécessaire de l'égalité et de la similitude des mêmes faces, comme il sera prouvé dans la suite. Le dodécaèdre rhomboïdal a six angles solides tétraèdres semblables et égaux, opposés deux à deux, savoir B, D, E, M, G, I, et huit angles trièdres, qui sont de même égaux et semblables, savoir A, F, H, C, L, R, S, N, d'où il suit que ce dodécaèdre a sept axes, dont trois passent par les premiers angles, et les quatre autres par les derniers.

La position naturelle du même dodécaèdre est celle sous laquelle un des axes qui passent par deux angles solides trièdres opposés, choisis à volonté, comme A, L, est dirigé verticalement. C'est une suite de ce que les trois faces AEFB, AESD, ABCD, ou LGHI, LMRI, LMNG s'assimilent, dans les ré-

[illegible] la théorie, à celles qui se réunissent autour du sommet supérieur ou inférieur d'un rhomboïde, et ainsi l'axe de cristallisation du dodécaèdre doit coïncider avec celui qui passe par les points A, L, qui sont censés être des sommets communs aux deux solides.

L'autre dodécaèdre que je nomme *bi-pyramidal*, a pour faces des triangles isocèles égaux et semblables, qui composent les surfaces de deux pyramides droites hexaèdres réunies base à base. Celui que l'on voit fig. [illegible] appartient au quarz. Il est évident que son axe de cristallisation ne doit pas différer de son axe symétrique, qui se confond lui-même avec les axes des pyramides dont le dodécaèdre est l'assemblage.

[illegible] Les divers solides que je viens de décrire varient d'une espèce à l'autre, ainsi que nous le verrons dans la suite, par le rapport de leurs dimensions, ou ce qui revient au même, par les incidences mutuelles de leurs faces.

Pour déterminer ces dernières, et en général toutes celles qui ont lieu sur les formes cristallines relatives aux différentes espèces minérales, on se sert d'un instrument appelé *gonyomètre*, dont l'invention est due à M. Carangeau. Cet instrument est composé d'un demi-cercle MTN (fig. 23), de laiton ou d'argent, divisé en degrés, et qui porte deux alidades AB, FG, dont l'une FG est évidée depuis *u* jusqu'en R en coulisse à jour, excepté à l'endroit K, où l'on

a laissé une petite traverse, qui n'est qu'un accessoire fait pour donner plus de solidité à l'instrument. Cette alidade est attachée en R et en c sur une règle de laiton située derrière, et qui fait corps avec le demi-cercle. La réunion de l'alidade avec cette règle s'opère au moyen de deux petites tiges à vis, qui s'insèrent dans la coulisse, et dont chacune porte un écrou. L'autre alidade est pareillement évidée, depuis x jusqu'en c, où elle est attachée au-dessus de la première, à l'aide de la tige à vis qui est en cet endroit, et qui traverse les deux rainures. En lâchant les écrous, on peut raccourcir à volonté les parties cG, cB des deux alidades, suivant que les circonstances l'exigent.

L'alidade AB n'ayant qu'un seul point d'attache en c, où est le centre du cercle, a un mouvement autour de ce centre, tandis que l'alidade GF reste constamment dans la direction du diamètre qui passe par les points 0° et 180°.

Il n'est pas inutile de remarquer que la partie supérieure de l'alidade AB doit être amincie, en forme de tranchant, vers son bord sz, dont la direction prolongée en dessous passe par le centre c de l'instrument. La raison en est que ce bord est ce que l'on appelle *la ligne de foi*, c'est-à-dire celle qui indique sur la circonférence graduée la mesure de l'angle cherché (1).

---

(1) Les personnes qui désireraient se procurer des gonyo-



Supposons maintenant que l'on veuille mesurer sur un cristal l'angle que forment entre eux deux plans voisins. On sait que cet angle est égal à celui de deux lignes menées d'un même point de l'arête qui réunit ces plans, avec la condition qu'elles soient perpendiculaires à cette arète et couchées sur les mêmes plans. Pour avoir cet angle, on disposera l'instrument de manière que les portions *c*G, *c*B des deux alidades ne laissent aucun jour entre elles et les plans dont il s'agit, et qu'en même temps leurs bords soient perpendiculaires à l'arête de jonction. Dans ce cas, les faces qui embrassent le cristal sont tangentes aux deux plans dont on veut avoir l'incidence.

Cela fait, on cherchera sur la circonférence de l'instrument le degré que marque la ligne de foi *sz*, ou l'angle que fait cette ligne avec celle qui passe par le centre *c* et par le point 0°, lequel angle est égal à celui que forment les deux portions G*c*, *c*B des alidades, puisqu'il lui est opposé au sommet.

C'est un avantage de pouvoir raccourcir à son gré ces mêmes parties, pour éviter les obstacles qui rendraient l'opération impraticable, et qui peuvent provenir soit de la gangue à laquelle adhère le cristal, soit des

---

mètres, peuvent s'adresser avec une entière confiance à MM. Richer, artistes très avantageusement connus. Ceux qu'ils exécutent ne laissent rien à désirer, soit pour la précision des mesures, soit pour le fini du travail. MM. Richer demeurent rue du Harlai, n° 6, ou boulevard Saint-Antoine, n° 71.

cristaux voisins dans lesquels il est engagé en partie; mais il est des cas où cette précaution ne suffit pas, et où l'on se trouverait gêné par la partie du demi-cercle située vers M, si sa position était invariable. L'ingénieux auteur de l'instrument a paré à cet inconvénient à l'aide du mécanisme suivant.

La tige située en *c* porte, outre les deux alidades, une tringle d'acier placée en dessous de la règle de cuivre sur laquelle est appliquée immédiatement l'alidade GF. L'extrémité supérieure de cette tringle, ou celle qui est située vers O, a une échancrure dans laquelle entre une tige d'acier garnie pareillement d'un écrou. De plus le demi-cercle est brisé à l'endroit du 90e degré, en sorte qu'au moyen d'une charnière dont il est garni au même endroit, le quart de cercle TM se replie en dessous du quart de cercle TN, et se trouve comme supprimé. Lorsque l'on veut exécuter ce mouvement, on lâche l'écrou qui maintenait la partie supérieure de la tringle *c*O, on dégage l'échancrure qui termine cette tringle de l'écrou qui s'y insérait, et l'on rabat la tringle jusque par dessous la règle de cuivre qui porte l'alidade GF. Lorsque l'angle mesuré excède 90^{d}, on remet le quart de cercle TM à sa place, pour en reconnaître la valeur.

Des variations des formes cristallines.

20. Parmi les cristaux originaires d'une même substance, trouvés dans différens pays, il en existe qui



sont semblables par le nombre de leurs faces, par la disposition respective de celles-ci, et, ce qui est très remarquable, par les angles qu'elles font les unes avec les autres. Les diversités, lorsqu'elles ont lieu, ne tiennent qu'à des causes accidentelles, qui ont changé le rapport des dimensions, par une suite de ce que certaines faces sont plus voisines ou plus éloignées du centre dans tel cristal que dans tel autre. Cet article en offrira plusieurs exemples; mais il n'en résulte qu'une différence d'aspect, et les inclinaisons mutuelles des faces subsistent sans aucune altération.

Souvent aussi, comme je l'ai déjà annoncé, la cristallisation, en agissant sur des molécules identiques, donne naissance à des polyèdres réellement distingués les uns des autres. Ainsi le fer sulfuré se présente sous la forme d'un cube, d'un octaèdre régulier, d'un dodécaèdre à faces pentagonales et d'un solide dont la surface est composée de 24 faces trapézoïdales égales et semblables. Dans l'espèce de la chaux carbonatée, outre plusieurs rhomboïdes différens par la mesure de leurs angles, on observe un dodécaèdre à faces triangulaires scalènes (fig. 24) et d'autres formes qui, au premier aspect, paraissent étrangères soit entre elles, soit à l'égard des précédentes.

21. Dans toutes les formes qui viennent d'être indiquées, les faces sont égales et semblables entre elles; mais il est plus ordinaire de trouver des cristaux dont la surface est composée de deux, de trois ou d'un

plus grand nombre d'ordres de facettes distinctes, de manière que si l'on prend celles de chaque ordre, et si on les suppose prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent, en masquant toutes les autres, on a un solide qui existe ou qui peut exister solitairement dans la même espèce.

Ainsi la combinaison des faces du cube avec celles de l'octaèdre régulier donne le solide à 14 faces représenté fig. 25. Dans la chaux carbonatée, la forme du prisme hexaèdre régulier qui est une des variétés de cette substance, en se combinant avec celles d'un rhomboïde très obtus, produit un solide à 14 faces (fig. 26), dont six verticales *c*, *c*, deux horizontales *o*, *o*, et six obliques *g*, *g*, disposées trois à trois vers chaque sommet. La forme du dodécaèdre à triangles scalènes (fig. 24), en se combinant avec un autre rhomboïde, produit un polyèdre à 18 faces représenté (fig. 27). Il existe aussi des combinaisons ternaires, quaternaires, etc., analogues aux précédentes. J'ai un cristal de fer sulfuré que je ferai connaître dans la suite, et qui a 134 facettes, ce qui est, dans ce genre, le *maximum* offert jusqu'ici par l'observation. Ces facettes se soudivisent en huit ordres différens, relatifs à autant de formes particulières.

22. J'ajouterai ici quelques observations sur les variations de forme purement accidentelles dont j'ai parlé précédemment. Il ne s'agit point de celles qui troublent entièrement la symétrie, en détruisant l'égalité des faces qui se correspondent, de manière que

les unes prennent une étendue considérable, tandis que les autres contrastent avec elles par leur petitesse, et quelquefois échappent presque à l'œil. La considération de ces anomalies est étrangère à la Géométrie des cristaux, et doit plutôt fixer l'attention du minéralogiste, qui est intéressé, comme observateur de la nature, à savoir démêler le type de la forme, à travers tous les jeux de position qui la déguisent. Je supposerai donc que les diversités occasionnées par les accidens que j'ai annoncés, influent également sur toutes les faces d'un même ordre, et je ferai voir qu'elles peuvent être ramenées à une limite dont elles s'écartent plus ou moins à mesure qu'elles se rapprochent des extrêmes, et réciproquement. Je me bornerai à un petit nombre d'exemples.

23. J'ai cité plus haut une forme représentée (fig. 25) et qui résulte de la combinaison des faces *g* du cube, avec les faces *d* de l'octaèdre régulier. Dans cette figure les faces *g*, qui sont des octogones, prédominent sur les faces triangulaires *d*, et si l'on conçoit que ces dernières s'écartent du centre, de plus en plus on aura une gradation dont le terme, qui sera le cube complet, aura lieu lorsque les faces *d* deviendront nulles.

Supposons au contraire que les faces *d* se rapprochent du centre, il y aura un autre terme où elles toucheront les faces *g* (fig. 28.) en restant toujours triangulaires, tandis que les faces *g* seront des carrés. Si le mouvement des faces *d* vers le centre continue

au-delà de ce terme, il est facile de voir qu'elles s'entrecouperont de manière à devenir des hexagones, tandis que les faces *g* conserveront la figure carrée, et n'auront fait que diminuer d'étendue. Alors le solide tendra de plus en plus vers la forme de l'octaèdre régulier, qu'il finira par présenter sans aucune modification, à un troisième terme où les faces *g* auront disparu. Or la limite à laquelle il convient de rapporter toutes les variations précédentes, est celle que représente la fig. 28, qui correspond à un terme fixe, où le solide participe également du cube et de l'octaèdre, et où ses faces considérées dans leur ensemble ont le plus grand degré de simplicité possible. Cette limite existe surtout parmi les cristaux de plomb sulfuré.

24. Il existe une variété de chaux carbonatée que l'on voit (fig. 29), et qui a sa surface composée de douze pentagones, dont six, savoir *c*, *c*, *c'*, sont situés comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier, et les six autres *g*, *g*, *g'*, etc. qui se réunissent trois à trois en sommets pyramidaux appartiennent au rhomboïde obtus, cité plus haut.

Si l'on conçoit que les deux sommets s'éloignent et s'approchent successivement l'un de l'autre, de manière que les faces de chacun restent parallèles à elles-mêmes, les faces verticales *c*, *c'*, dans le premier cas auront une extension illimitée; mais dans le second, il y aura un terme où leurs côtés *mn*, *rs*, etc. après avoir été toujours en diminuant, s'éva-

 …uiront à de
les unes prennent une étendue con… …io). Au-delà
que les autres contrastent avec elles… …nt de s'appro-
et quelquefois échappent presque à… …tendue, et en
ration de ces anomalies est étrang… …mens s'entrecou-
des cristaux, et doit plutôt fix… …outes des hepta-
néralogiste, qui est intéressé, c… …triangles auront
la nature, à savoir démêler le… …me du rhomboïde
travers tous les jeux de positi… …toutes ces varia-
supposerai donc que les div… …, et dans laquelle
les accidens que j'ai anno… …mple possible re-
sur toutes les faces d'un m… …s triangles c, c,
qu'elles peuvent être ram… …ux extrêmes dont
s'écartent plus ou moins…
chent des extrêmes, et… …polyèdre n'indique
nerai à un petit nombr… …variations. C'est ce

23. J'ai cité plus… …que ce polyèdre est un
(fig. 25) et qui résulte… …ramides, comme on le
cube, avec les faces d… …point d'intermédiaire
figure les faces g,… …ouvemens en sens con-
nent sur les faces… …dont l'un tend à faire
que ces dernière… …latérales, dans le sens
plus on aura u… …et l'autre à les diminuer
le cube complet… …nulles à zéro. Mais nous
dront nulles… …de cas, la théorie sert à

Supposons… …prisme, la hauteur qui
chent du cent… …tend la cristallisation
toucheront l… …par accident. Je revien-
triangulaires… …de détail, sur les varia-
Si le mouven…

..ormes cristallines, et je cite-
..nite ne peut être déterminée
.. théorie.

..S GÉNÉRAUX DE LA THÉORIE.

..ormes primitives.

.. que tend à faire naître l'observation
..s formes cristallines sous lesquelles se
..une même substance minérale, est qu'il
.. une parmi elles, qui peut être regardée
..le type auquel toutes les autres sont suscep-
..d'être ramenées. En partant de cette idée, on
..vrait que le solide qui fait la fonction de type
..composé de particules semblables à lui-même, ou
..nt la forme serait en rapport avec la sienne. Ce
..nême solide serait inscrit dans chacun de ceux qui
offriraient une configuration différente, et celle-ci
dépendrait de certaines lois auxquelles auraient été
soumises les particules de la matière enveloppante,
en s'arrangeant symétriquement autour du solide
intérieur.

Mais pour que cette idée s'accordât avec la réalité, il faudrait que la théorie dont elle aurait fourni la base, satisfît à deux conditions; l'une, que l'adoption de la forme qui serait considérée comme le type des autres n'eût rien d'arbitraire, et fût indiquée par la nature elle-même; l'autre que l'existence des lois d'arrangement qui détermineraient son passage aux

autres formes fût démontrée avec une précision rigoureuse.

Mon but, dans cet article, sera d'exposer les résultats des observations qui me paraissent remplir la première condition. Je ferai connaître, dans les articles suivans ceux des recherches que j'ai entreprises dans la vue de satisfaire à la seconde.

J'ai d'autant plus lieu d'espérer qu'on me permettra de raconter ici la manière dont j'ai été conduit à l'observation qui m'a donné, pour ainsi dire, la clef de la théorie, qu'elle n'a point été cherchée, et s'est présentée comme d'elle-même, en sorte qu'il suffisait de ne pas fermer les yeux sur le fait fondamental qui en était le sujet, et qui devait à son tour amener tout le reste.

26. Ce fait s'est montré sur un cristal prismatique de chaux carbonatée, dont M. Defrance, amateur très éclairé, avait eu la bonté de me faire présent, au moment où il venait de se détacher d'un groupe qui faisait partie de sa riche collection.

En examinant ce cristal, lorsque je fus de retour, je m'aperçus que la fracture qui s'y était faite à l'endroit par lequel il tenait au groupe, avait emporté une des arêtes du contour de la base, et j'observai, au même endroit, une face *stoo* (fig. 33) qu'il était facile de reconnaître, à la netteté de son poli et à la vivacité de son éclat, pour un des joints naturels situés entre les lames dont le prisme était l'assemblage.

La figure de cette face, qui était un trapèze, et la

direction de sa base *st*, qui était tournée vers l'arète opposée *bc*, indiquait que pour la faire naître, à l'aide de la division mécanique, il aurait fallu diriger le plan coupant parallèlement à l'arète *lf*; et en estimant la position de ce plan d'après celle de la face déjà observée, j'avais jugé qu'il devait être incliné sensiblement de la même quantité, tant sur la base du prisme, que sur la face latérale adjacente *lff'l'* (1). Supposant donc la chose faite, comme je viens de le dire, j'essayai d'intercepter les autres arêtes par de nouvelles divisions analogues à la première, et je trouvai qu'il n'y en avait que trois parmi les six du contour de chaque base, qui se prêtassent à cette opération. Ces arêtes étaient d'une part, *lf*, *mb*, *cd* (fig. 34), et d'une autre part *b'c'*, *f'd'*, *m'l'*; d'où l'on voit que, connaissant une des arêtes susceptibles d'être interceptées par des plans diviseurs, il fallait pour continuer l'opération, prendre les autres arêtes de deux en deux, autour de la même base, et de plus choisir autour de la base opposée les trois arêtes qui alternaient avec les précédentes; il en résultait que les trois trapèzes *stoo*, *xnkk*, *vuhh*, mis à découvert autour de la base supérieure, et les trois autres *iiv'u'*, *x'n'ee*, *s't'gg* qui se montraient autour de la base inférieure, étaient parallèles chacun à chacun.

(1) Je reviendrai dans la suite sur cette égalité d'inclinaison, qui conduit à des résultats intéressans sous le rapport de la théorie.

autres formes fût démontrée avec u
goureuse.

Mon but, dans cet article, sera
sultats des observations qui me pa
première condition. Je ferai com
ticles suivans ceux des recherche
dans la vue de satisfaire à la se

J'ai d'autant plus lieu d'esp
tra de raconter ici la manière
l'observation qui m'a donné
de la théorie, qu'elle n'a poin
présentée comme d'elle-m
sait de ne pas fermer les
qui en était le sujet, et q
tout le reste.

26. Ce fait s'est mon
de chaux carbonatée,
éclairé, avait eu la h
ment où il venait
faisait partie de sa

En examinant
je m'aperçus que
droit par lequel
une des arêtes d
au même endro
facile de recon
vivacité de so
situés entre le

La figure d

n prisme,
, dont les
le plus en
me où elles
coïncidaient
ont elles for-
me fut changé
gonales, dont
étaient le ré-
autres ooiOe,
prisme.
gones extrêmes
imensions, tandis
ent continuelle-
e les points *o* et *e*,
moindre, ces derniers
simples triangles,

ayant fait disparaître
vestiges de la surface
entre les mains, et
prisme, fut un rhom-
es faces prises vers un
entre elles d'envi-
le grand angle EAI,
it pour mesure, à peu

rellement me suggérer
poser, était qu'il n'offrait

particulier d'une propriété commune à variétés de la même substance, en sorte ristaux de chacune d'elles renfermaient un parfaitement semblable à celui qui était en- lans le prisme sur lequel j'avais opéré; mais idée avait contre elle une difficulté qui parais- d'autant plus embarrassante, qu'elle était sug- rée par l'espèce de forme à laquelle appartenait le noyau dont il s'agit. Elle consistait en ce qu'il existe parmi les cristaux de chaux carbonatée divers rhomboïdes que j'ai déjà cités plus haut, dont l'un, qui est beaucoup plus obtus, a son angle plan du sommet de 114^d 18′, et les autres qui sont aigus, offrent au même endroit un angle qui est successivement de 75^d 31′, de 45^d 34′ et de 37^d 31′.

Il était difficile de concevoir comment la forme rhomboïdale, en supposant qu'elle fût toujours celle du noyau, serait restée semblable à elle-même, sans aucune variation, dans des cristaux qui la présentaient à l'œil sous des traits si différens des siens, et qui, comparés entre eux, n'avaient rien de commun que cette même forme prise en général.

Mais l'observation fit disparaître le paradoxe que semblait offrir le contraste entre les formes extérieures de ces rhomboïdes et celles de leur noyau, et elle prouva que ce noyau, en conservant ses dimensions et ses angles, était inscrit symétriquement dans chacun d'eux. Il ne s'agissait pour l'obtenir que de trouver les différens sens suivant lesquels devait

être divisé le rhomboïde qui le renfermait; c'est ce que je vais éclaircir par des exemples.

28. Je choisirai d'abord le rhomboïde obtus de 114d 18', que je nomme *équiaxe*, et que représente la figure 38, avec le noyau qui lui est inscrit. Dans ce cas, les plans diviseurs doivent être dirigés de manière qu'ils interceptent les six angles solides latéraux *y*, *p*, *r*, *x*, etc. (fig. 39), et que leurs intersections avec les faces du rhomboïde soient parallèles aux diagonales obliques. Par exemple, le plan qui intercepte l'angle solide *z* (fig. 39), doit couper les deux faces *aprz*, *ayxz*, suivant des lignes *db*, *dc*, parallèles aux diagonales *ar*, *ax*, d'où il résulte que ce plan détachera une pyramide triangulaire dont la base *bcd* sera parallèle à la face AEOI (fig. 38) du noyau. On concevra de même que le plan *b′ c′ d′* (fig. 39), qui intercepte l'angle solide *u* opposé à l'angle *z*, doit détacher une pyramide triangulaire dont la base *b′ c′ d′* sera parallèle à la face A′KGH (fig. 38) du noyau. En appliquant le même raisonnement aux autres plans, on aura le rudiment de la division mécanique, dont l'effet est de mettre à découvert six triangles isocèles parallèles aux faces du noyau, et il est à remarquer que déjà les angles aux sommets de ces triangles, tels que *cdb*, *c′d′b′*, sont égaux aux angles obtus EAI, HA′K (fig. 38) des rhombes du noyau, et ont pour mesure 101° 32′, comme ceux du rhomboïde retiré du prisme hexaèdre régulier.

29. Si l'on continue la division, parallèlement aux

mêmes triangles, les joints naturels mis à découvert par les plans diviseurs finiront par coïncider avec les diagonales obliques *ax*, *ar*, *a'p*, etc. du rhomboïde *arxa'* (fig. 39); et à ce terme, le noyau se trouvera isolé. Il suit de tout ce que je viens de dire, que l'axe du rhomboïde circonscrit est égal à celui du noyau, que les bords supérieurs de ce dernier se confondent sur une même direction avec les diagonales obliques du rhomboïde dont il s'agit, et que ses angles solides latéraux E, O, I, K, etc. (fig. 38) sont tournés vers les faces du même rhomboïde. De là naît une considération qui s'étend à tous les rhomboïdes dont j'ai à parler dans cet article. Elle consiste en ce que dans tous les solides de cette espèce les parties semblables situées trois à trois vers chaque sommet alternent entre elles, et parce que le noyau est toujours disposé symétriquement à l'égard du rhomboïde qui le renferme, la double alternative qui en résulte produit un assortiment de deux rhomboïdes dont l'un est inscrit dans l'autre.

29. Je passe au second exemple, que je tirerai du rhomboïde aigu dans lequel l'angle plan du sommet est de 75^{d} 31', et que la figure 40 représente circonscrit à son noyau. Je le nomme *chaux carbonatée inverse*, pour une raison que j'exposerai dans la suite. Je me bornerai à indiquer la marche que doit suivre la division mécanique, pour en extraire le noyau, que l'observation prouve être semblable à celui que renferment les deux variétés précédentes.

Un coup-d'œil jeté sur la figure suffit pour faire juger que les bords supérieurs *ad*, *at*, *ab* du rhomboïde circonscrit, et ceux qui leur correspondent vers le sommet opposé, sont parallèles aux diagonales obliques du noyau. Ainsi, les plans diviseurs doivent être dirigés parallèlement aux bords dont il s'agit, en faisant des angles égaux avec les faces adjacentes. Il en résulte que les trois plans qui interceptent les bords supérieurs contigus à un même sommet *a* (fig. 41), mettent à découvert trois pentagones alongés *flsor*, *xuzos*, *ypzor*, dont les parties supérieures se réunissent en un angle solide semblable à celui qui est contigu au sommet A (fig. 40) du noyau. A mesure que l'on continue la division mécanique, les pentagones s'élargissent d'abord en se rapprochant du noyau, puis s'entrecoupent, et finissent par se confondre avec les rhombes du même noyau.

Le troisième exemple se rapporte au rhomboïde que représente la figure 42 circonscrit de même à son noyau. L'angle *baf* de son sommet n'est que de 45° 34'. Ce n'est pas cette grande différence entre ses angles et ceux de son noyau qui m'a suggéré le nom de *chaux carbonatée contrastante* que je lui ai donné, mais une propriété remarquable dont il jouit et que je ferai connaître dans la suite. On juge aisément, à la première vue de la figure, que les faces de ce rhomboïde sont tournées vers celles du noyau, en faisant avec l'axe des angles beaucoup plus aigus. Cette cor-

rélation indique que les sections *lm*, *lx*, *mx* (fig. 43) des plans diviseurs sur les faces du rhomboïde, doivent être parallèles à ses diagonales horizontales; ces mêmes plans en partant des sections dont il s'agit, s'inclinent vers l'axe, de manière que les angles qu'ils font avec les faces *bafr*, *bauc*, etc. du rhomboïde, sont de 149° 2′, d'où il suit qu'ils forment par leur réunion une pyramide triangulaire *lxmy*, semblable à celle qu'on détacherait à l'aide d'un plan mené par les trois angles E, I, G (fig. 42) du noyau. Dans les divisions ultérieures, les nouveaux triangles mis à découvert s'approchant de plus en plus du noyau, arrivent à un terme au-delà duquel ils s'entrecoupent par leurs angles latéraux, et passent par degrés à la figure du rhombe. Ils ne sont plus alors distingués des faces du noyau.

30. Le quatrième exemple me sera fourni par un rhomboïde encore plus aigu que le contrastant, dans lequel l'angle plan du sommet est de 37^d 31′. C'est celui que représente la figure 44, en rapport de position avec son noyau, et auquel j'ai donné le nom de *chaux carbonatée mixte*. Ce rhomboïde présente le cas inverse du précédent, c'est-à-dire que ce sont ses bords obliques qui regardent les faces du noyau. Dans ce cas les plans diviseurs situés vers un même sommet *s*, partent de trois points pris sur les bords dont il s'agit, et mettent à découvert trois trapézoïdes *prsn*, *utsn*, *xtsr* (fig. 45), inclinés de 155^d 50′ sur les mêmes bords, et dont les triangles

[illegible] latérales d'une pyra-
[illegible] de ses angles et par sa
[illegible] analogues font naître
[illegible] (fig. 43), et qui a son
[illegible] va comme de soi-même,
[illegible] tout ce qui doit arriver jus-
[illegible] rhomboïdes se trouvent convertis
[illegible] confondent avec ceux du noyau.

[illegible] rhomboïdes que je viens de
[illegible] la nature présente isolément.
[illegible] entrent comme élémens, avec
[illegible] dans des formes cristallines
[illegible] composées. Le nombre de ceux que
[illegible] est de seize, en y comprenant
[illegible].

[illegible] manière de diviser mécaniquement
[illegible], j'ai suivi une marche mé-
[illegible] laquelle on voit s'opérer, pour
[illegible], le passage gradué du rhom-
[illegible] celui qu'il renferme comme noyau.
[illegible] on peut, avec de l'habitude et
[illegible] beaucoup plus promptement
[illegible] opération indique comme d'elle-
[illegible] de l'abréger.

[illegible] cristaux calcaires, d'une forme
[illegible] soumis successivement à la division
[illegible] des résultats analogues à celui
[illegible] les rhomboïdes. Je me bornerai
[illegible] tiré du dodécaèdre à triangles

scalènes que représente la figure 46, circonscrit à son noyau. Je le désigne par le nom de *chaux carbonatée métastatique*, dont l'interprétation sera donnée dans la suite par le développement des propriétés intéressantes dont il jouit. La manière d'obtenir tout d'un coup le rhomboïde qui fait ici l'office de noyau s'offrira comme d'elle-même, si l'on fait attention que les bords inférieurs EO, OI, IK etc. de ce rhomboïde se confondent avec ceux des triangles scalènes du dodécaèdre. Il en résulte que si l'on fait passer trois plans diviseurs par ces mêmes bords pris deux à deux, suivant l'ordre où ils forment des angles rentrans EOI, IKG, GHE, tournés vers le point S, ils mettront à découvert les trois faces contiguës au sommet supérieur A du noyau. On répetera ensuite la même opération, en reprenant les mêmes bords deux à deux, suivant l'ordre alternatif, où leurs angles rentrans OEH, KIO, KGH, sont tournés vers le point *s'*, et l'on achèvera d'isoler le noyau.

Maintenant, comme la forme du dodécaèdre diminue uniformément de part et d'autre, en partant des bords inférieurs du noyau, si l'on choisit le long des arètes obliques *os*, *ks*, *hs* (fig. 47) les plus longues, trois points *n*, *x*, *p*, pris à la même distance du sommet *s*, les plans *rptu*, *ruxz*, *rpnz*, menés par ces points, parallèlement aux bords EO et OI, IK et KG, GH et HE (fig. 46) mettront à découvert trois rhombes parallèles et semblables à ceux qui terminent le noyau du même côté. Le même résultat

aura lieu en sens contraire, à l'aide des trois plans diviseurs $r'p't'u'$, $r'u'x'z'$, $r'p'n'z'$ analogues aux premiers, et en continuant l'opération vers le centre, on aura une série de rhombes croissans, dont chaque terme offrira l'aspect du noyau. Au contraire, lorsque l'on sous-divise les rhomboïdes dont j'ai parlé d'abord, les joints naturels passent par degrés de la figure du triangle ou du trapézoïde à celle du rhombe, par une suite de la manière dont le noyau est engagé dans ces rhomboïdes.

Les cristaux de toutes les autres substances minérales, soumis successivement à la division mécanique, ont servi à prouver la généralité du résultat, à l'égard duquel la chaux carbonatée avait pris l'initiative. Ceux qui appartiennent à une même espèce donnent un noyau d'une forme particulière et constante. Ainsi, dans l'amphibole, le pyroxène, le glaubérite, le plomb chromaté, l'arsenic sulfuré, c'est un prisme oblique rhomboïdal, dont la base est plus ou moins inclinée à l'axe, et dont les faces latérales font entre elles des angles plus ou moins ouverts, suivant l'espèce à laquelle il appartient. Dans la chaux phosphatée, l'émeraude, la cordiérite, la pinite, le cuivre sulfuré, c'est un prisme hexaèdre régulier, dans lequel le rapport entre le côté de la base et la hauteur, déterminé par la théorie, varie de même d'une espèce à l'autre. Dans le corindon, le quarz, la tourmaline, la chabasie, le fer oligiste, c'est un rhomboïde plus ou moins obtus ou aigu. Dans l'arragonite, le tri-

phane, le plomb carbonaté, le plomb sulfaté, le cuivre phosphaté, l'antimoine sulfuré, etc., c'est un octaèdre qui emprunte de même des caractères spécifiques du rapport de ses dimensions et de la mesure de ses angles. Les formes des molécules intégrantes participent des diversités que présentent les solides qui en sont des assemblages.

32. La forme du noyau se rencontre, comme produit immédiat de la cristallisation, parmi celles des variétés de diverses substances, et un grand nombre de ces variétés présentent des faces parallèles à celles du noyau renfermé dans leur intérieur, combinées avec d'autres faces qui dépendent des lois auxquelles est soumise la structure, ainsi que je l'expliquerai dans la suite.

33. Lorsqu'un cristal se prête difficilement à la division mécanique, on peut encore déterminer les positions de ses joints naturels par différens moyens, dont le plus simple est fondé sur l'observation que je viens de citer. On reconnaît chacun des joints dont il s'agit, lorsque ayant fracturé le cristal de manière à laisser subsister en partie la face qui est parallèle à ce joint, on le fait mouvoir à une vive lumière. Il arrive alors qu'au même instant où le résidu de la face dont je viens de parler renvoie à l'œil les rayons réfléchis, on aperçoit à l'endroit de la fracture d'autres reflets qui partent des lames intérieures, en sorte qu'en faisant tourner le cristal en divers sens, on voit paraître et disparaître simultanément les rayons qui produisent les deux reflets. On en conclut qu'il existe

dans l'intérieur du cristal un joint naturel situé parallèlement à la face dont j'ai parlé.

34. Les formes des noyaux obtenus par la division mécanique de tous les cristaux connus, que j'appellerai désormais *formes primitives*, se rapportent aux cinq genres suivans : le parallélépipède, l'octaèdre, le tétraèdre qui est toujours régulier, le prisme hexaèdre, pareillement régulier, et le dodécaèdre à plans rhombes, tous égaux et semblables.

Formes des molécules intégrantes.

35. Dans les résultats précédens, nous n'avons conduit la division mécanique que jusqu'au terme où elle avait isolé le noyau du cristal qui lui était soumis, parce que déjà la forme de ce noyau pouvait être considérée comme un lien commun, qui unissait toutes les variétés relatives à une même espèce. Nous verrons ce lien se resserrer davantage, et les rapports qu'il fait naître entre les mêmes variétés devenir plus intimes, à l'aide des observations suivantes et des conséquences qui en découlent.

La sous-division de la forme primitive, parallèlement à ses différentes faces, dont nous allons nous occuper, présente plusieurs cas différens qui dépendent de l'espèce de solide à laquelle appartient celle que l'on considère.

Si c'est un parallélépipède, il est bien évident que sa sous-division donne de petits parallélépipèdes semblables à lui-même; mais toutes les autres formes

sous-divisées parallèlement à leurs faces, se résolvent en petits solides d'une forme différente. Prenons pour exemple le prisme hexaèdre régulier, et pour plus grande simplicité supposons que les plans diviseurs, parallèles aux faces latérales, passent par les centres des bases, le prisme se trouvera partagé en six prismes partiels qui auront pour bases des triangles équilatéraux; et si l'on multiplie les divisions suivant des directions parallèles aux premières, et suivant d'autres parallèles aux bases, on aura toujours pour résultat un assemblage de prismes triangulaires équilatéraux, ainsi qu'il est facile d'en juger par l'inspection de la figure 48. Mais ce qu'il est essentiel d'observer, c'est que ces prismes sont tellement disposés, qu'étant pris deux à deux, ils forment des parallélépipèdes indiqués par A*Oip*, *piγε*, etc. (fig. 49), et qui, dans le cas présent, peuvent être considérés comme des prismes droits de 120^d et 60^d ; et il est visible que le prisme hexaèdre régulier peut être conçu comme un assemblage de pareils prismes.

36. Proposons-nous encore de sous-diviser le dodécaèdre rhomboïdal parallèlement à ses différentes faces, en faisant passer les plans diviseurs par le centre du solide.

Soit *ep* (fig. 50) un de ces dodécaèdres. Supposons des plans coupans qui passent par le centre, et dont chacun soit parallèle à deux faces opposées du dodécaèdre. Il est d'abord évident que ces plans seront au nombre de six. De plus chacun d'eux, par exemple

celui qui est parallèle aux rhombes *dlfn*, *boht*, passera par la diagonale *gy*, par les deux arêtes *ye*, *er*, par la diagonale *rq*, et par les deux arêtes *qp*, *pg*, c'est-à-dire que chaque plan passera par deux petites diagonales et par quatre arêtes. Or il y a en tout douze petites diagonales et vingt-quatre arêtes distinctes, dont chacune est commune à deux rhombes voisins; d'où l'on conclura que les six plans opèrent des sections sur toutes les arêtes et sur toutes les diagonales obliques du dodécaèdre. Donc il y aura toujours trois plans qui passeront par les trois côtés de chaque triangle, tel que *ylg*, ou *yog*, qui forme la moitié d'un rhombe coupé dans le sens de sa petite diagonale; et puisque ces plans passent en même temps par le centre *c*, ils détacheront une pyramide triangulaire, ou un tétraèdre. Donc le dodécaèdre se trouvera décomposé en vingt-quatre tétraèdres dont chacun aura pour faces quatre triangles isocèles égaux et semblables. Remarquons que ces tétraèdres, pris six à six, forment quatre rhomboïdes, dont chacun a l'un de ses sommets, tels que *y*, *h*, *f*, ou *r*, situé à l'extérieur, et l'autre au centre *c* du dodécaèdre. La figure 51 représente séparément le rhomboïde dont le sommet extérieur est au point *y*.

37. Je m'abstiendrai de parler ici de la sous-division des autres formes primitives, dont les résultats, moins simples que les précédens, conduisent à des solides de deux formes différentes. Je me bornerai à dire pour le présent que ce défaut de simplicité n'inté-

resse point la théorie, qui parvient aussi sûrement à son but, dans ces sortes de cas, que dans ceux qui ont rapport au parallélépipède, au prisme hexaèdre régulier, et au dodécaèdre rhomboïdal.

Nous venons de voir que la sous-division de ces trois genres de solides, parallèlement à leurs différentes faces, conduit à trois formes différentes, qui sont le tétraèdre, le prisme triangulaire et le parallélépipède. Or, comme il faut au moins quatre plans pour circonscrire un espace, il en résulte que les trois formes dont il s'agit ayant successivement leur surface composée de 4, 5 et 6 plans, sont les plus simples que l'on puisse concevoir. Nous verrons dans la suite que le tétraèdre est toujours un des deux solides offerts par la sous-division des formes primitives, différentes de celles que j'ai prises pour exemples, et que l'on peut, à l'aide d'une hypothèse plausible, donner l'exclusion à l'autre solide, ou le considérer comme nul.

38. Nous n'avons considéré jusqu'ici que les solides qui résultent de la sous-division des formes primitives suivant des directions parallèles aux faces qui terminent celles-ci. Or, l'observation indique aussi dans certaines formes primitives des joints situés suivant des directions différentes de celles qui correspondent aux faces. Je me bornerai ici à ce qui regarde le parallélépipède, me réservant à faire connaître les résultats des observations relatives aux autres formes dans les articles destinés pour la partie

analytique, où je traiterai de ces formes. Voici quelques exemples qui se rapportent au cas dont je viens de parler.

Le prisme droit rhomboïdal *bh* (fig. 52), qui est la forme primitive de la staurotide, et dans lequel les pans les plus inclinés M, M, font entre eux un angle de $129^{d}\ 30'$, se sous-divise dans le sens d'un plan qui passerait par les petites diagonales *bd*, *fh* des bases, en deux prismes triangulaires isocèles égaux et semblables, d'où l'on voit que ces prismes sont réunis de la même manière que ceux qui composent les prismes rhomboïdaux, dont le prisme hexaèdre régulier peut être considéré comme l'assemblage. Dans la forme primitive de la baryte sulfatée, qui est un prisme de la même espèce, mais dont les pans M, M (fig. 53) sont inclinés l'un sur l'autre de $101^{d}\frac{1}{2}$, la sous-division a lieu dans le sens des deux diagonales *bi*, *dk* et *xy*, *hr* des bases, ce qui donne pour résultat quatre prismes triangulaires dont les bases sont des triangles rectangles scalènes *bok*, *boa*, etc., égaux et semblables. Les prismes obliques rhomboïdaux, qui offrent les formes primitives de l'amphibole et du pyroxène subissent des divisions analogues à la seconde de celles dont je viens de parler. Dans le rhomboïde primitif AA′ (fig. 54) de la tourmaline, dont deux faces adjacentes prises vers un même sommet forment entre elles un angle de $133^{d}\ 26'$, chacun des plans diviseurs qui sont au nombre de six, passe par une diagonale oblique, telle que A*o*, par l'axe AA′,

et par l'arête A'*o*, comprise entre la même diagonale et l'axe, d'où il suit que les six coupes détachent autant de tétraèdres, dont les faces prises deux à deux, telles que AE*o*, A*o*E, et AEA', A*o*A', sont égales et semblables. Il en résulte que ces six tétraèdres sont assortis entre eux de la même manière que ceux qui composent les rhomboïdes dont la réunion produit le dodécaèdre rhomboïdal.

Ces solides, les uns prismatiques, les autres tétraèdres, donnés par la sous-division d'un parallélépipède qui fait la fonction de forme primitive, étant les analogues de ceux dont j'ai parlé d'abord, me paraissent devoir être placés à côté d'eux, dans l'ordre de la structure.

39. Maintenant la division physique d'un minéral auquel je fais subir une des opérations dont je viens de parler, par exemple celle de la chaux carbonatée, a nécessairement un terme, et si j'avais des organes assez délicats pour atteindre ce terme, j'arriverais à des corpuscules quelconques que je ne pourrais plus sous-diviser ultérieurement sans séparer les molécules de chaux et d'acide dont ils sont les assemblages. La supposition la plus naturelle que je puisse faire ici, est que la route que j'ai prise est celle qui conduit à ce terme, c'est-à-dire que ce qui est au-delà du point où je cesse de voir ressemble à ce que j'avais vu jusqu'alors. Or, dans cette hypothèse, les corpuscules dont je viens de parler seraient des rhomboïdes d'une extrême ténuité, et de la même figure que ceux d'un

volume sensible que j'avais d'abord obtenus. Ainsi nous admettrons dans les minéraux deux sortes de molécules; les unes que j'appelle *molécules intégrantes*, et qui sont censées être les plus petits solides que l'on puisse extraire du minéral sans altérer sa nature, et les autres que j'appelle *molécules principes*, *molécules élémentaires*, et qui sont, dans le cas présent, d'une part celles de la chaux, et de l'autre celles de l'acide carbonique.

J'observerai que si ces corpuscules auxquels j'arrive, en continuant, par la pensée, la division mécanique jusqu'à sa limite, ne représentent pas exactement ceux sur lesquels agit l'affinité dans la production des cristaux, ils nous en offrent les équivalens; et les résultats que nous obtenons, en les adoptant, sont si parfaitement conformes à l'observation, que nous ne serions pas censés nous être trompés, en prenant les molécules de la théorie pour celles de la nature.

Nous admettrons donc trois formes de molécules intégrantes employées par la cristallisation dans la production des corps réguliers qu'elle offre à notre observation, savoir, le tétraèdre, le prisme triangulaire et le parallélépipède. Ces formes si simples et en même temps si fécondes par la grande variété des résultats qu'elles sont susceptibles de faire naître relativement à une seule espèce de minéral, semblent encore se multiplier par le rapport de dimensions qui distingue chacune d'elles comparée à elle-même dans différentes espèces.

Molécules soustractives.

40. Nous avons vu que les prismes triangulaires donnés par la division mécanique du prisme hexaèdre régulier sont assortis entre eux, comme si étant liés invariablement deux à deux, ils formaient des prismes rhomboïdaux, en sorte que le prisme hexaèdre peut être conçu comme un assemblage de ces mêmes prismes. Le dodécaèdre rhomboïdal présente une structure analogue à la précédente. Les tétraèdres que l'on en retire, à l'aide de la même opération, sont arrangés de manière qu'étant pris six à six, ils composent des rhomboïdes dont la somme équivaut à ce dodécaèdre. La même chose était faite, pour ainsi dire d'avance, à l'égard des prismes triangulaires et des tétraèdres offerts par la sous-division des diverses formes primitives qui se rapportent immédiatement au parallélépipède.

Or, les applications de la théorie aux formes cristallines dont les molécules intégrantes sont des prismes triangulaires ou des tétraèdres, soit que leur forme primitive diffère ou non du parallélépipède, s'assimilent à celles où les formes qu'elle considère ont pour molécules des parallélépipèdes semblables au solide primitif, c'est-à-dire que, dans le premier cas, la théorie atteint son but, en faisant faire aux parallélépipèdes composés de prismes triangulaires ou de tétraèdres, les mêmes fonctions que celles qui,

dans le second cas, dérivent de la forme propre des parallélépipèdes indivisibles ou censés tels.

Je donne le nom de *molécules soustractives* à ces petits parallélépipèdes qui sont comme les élémens dont la considération suffit à la théorie, pour les distinguer des molécules intégrantes qui souvent les composent par leur réunion. Dans les cas où aucune observation n'indique la sous-division de ces parallélépipèdes, il est évident que la molécule soustractive est semblable à la molécule intégrante.

Il suit de là que l'on peut considérer la molécule soustractive comme une unité sur laquelle opère la théorie, sans aucun égard à la sous-division qui pourrait avoir lieu de cette unité en fractions représentées par les molécules intégrantes. Ce point de vue [illegible] l'avantage de généraliser la théorie et [illegible] ses applications, écarte de plus les difficultés qui pourraient faire naître l'embarras de savoir si nous [illegible] les derniers résultats de la division mécanique, ou ceux qui nous offriraient les véritables molécules intégrantes dans l'état d'isolement.

C'est par un motif fondé sur ce qui précède que, dans l'exposé que je vais faire des lois auxquelles est soumise la structure des cristaux, je me bornerai aux formes dont le noyau est un parallélépipède, parce que je n'ai en vue que d'y donner une idée de la marche générale de la cristallisation, et de la manière d'agir des lois dont il s'agit. Je réserve pour la partie analytique les détails relatifs à la théorie des autres

formes qui ont pour noyau un solide différent du parallélépipède, et pour molécules soustractives des assemblages de molécules intégrantes prismatiques ou tétraèdres.

Des lois auxquelles est soumise la structure des cristaux.

42. Nous n'avons considéré jusqu'ici que les matériaux qui entrent dans la construction des cristaux, et nous avons vu que les formes des molécules qui les ont fournis sont limitées à celles des trois solides les plus simples que l'on puisse imaginer. Il reste maintenant à expliquer comment la cristallisation parvient à faire sortir d'un espace si resserré cette multitude presque infinie de corps si diversifiés par le nombre, par les figures et par les combinaisons des faces qui les terminent.

Pour concevoir en général la marche des lois dont toutes ces diversités sont les résultats, observons que les lames que nous détachons lorsque nous divisons un cristal, en partant des points les plus éloignés du centre, jusqu'à ce que nous arrivions au noyau, augmentent progressivement d'étendue, à mesure qu'elles se rapprochent davantage de ce noyau. Or, pour se faire une idée du mécanisme de la structure dans le passage du noyau aux formes secondaires, il ne s'agit que de prendre les lames dans l'ordre inverse, et il est bien évident que, prises de cette manière, elles décroissent progressivement, à mesure

qu'elles s'écartent du noyau, par la soustraction d'une certaine quantité de molécules destinées à les compléter, dans le cas où elles auraient enveloppé le noyau, qui n'aurait fait alors que s'accroître, en restant toujours semblable à lui-même. Et comme le décroissement se fait d'une manière uniforme et régulière, puisque son effet est de faire naître des faces planes ou qui nous paraissent telles, nous en conclurons que les lames dont il s'agit et que j'appelle *lames de superposition*, subissent leur décroissement de manière à conserver toujours des figures rectilignes.

43. Avant d'aller plus loin, je ferai une observation importante pour l'intelligence de ce qui précède, et qui s'étend à tout ce que je dirai dans la suite. Elle consiste en ce que, dans la réalité, un cristal n'est autre chose depuis son centre jusqu'à sa surface, qu'un assemblage de molécules disposées symétriquement, c'est-à-dire que la distinction entre le noyau et la matière enveloppante n'est qu'un moyen de faciliter les applications de la théorie. Comme le noyau donné par la division mécanique poussée jusqu'à un certain terme est une partie constante qui est commune à toutes les variétés d'une même espèce, nous considérons chaque cristal comme étant composé de cette constante, plus d'une variable dont la détermination est l'objet de la théorie.

Je ferai voir dans un article à part que le cristal naissant est déjà semblable à celui que la nature nous présente entièrement formé, et qu'il ne fait

ensuite que s'accroître par une succession de couches qui se recouvrent mutuellement. La structure se combine avec cette augmentation de volume, et les choses se passent comme si la cristallisation avait commencé par produire un noyau égal et semblable à celui que nous obtenons à l'aide de la division mécanique, et qu'ensuite ce noyau se fût accru par une superposition de lames analogues à celles que nous détachons successivement, au moyen de la même opération. En un mot, je donne ici l'ordre de la structure et non celui de l'accroissement, parce que la considération du premier est le véritable guide que doit suivre la théorie pour arriver à son but, en partant d'un fait donné par l'observation, qui est l'existence du noyau, et en ramenant à ce fait toutes les variations que subissent les formes dont la structure n'est que la continuation de celle du même noyau, soumise à certaines lois que je vais exposer.

44. Il suit de ce que j'ai dit plus haut, que les faces des cristaux secondaires ne sont autre chose que la somme des nouveaux bords qui résultent de l'alignement des molécules aux endroits où les lames de superposition subissent des décroissemens, d'où l'on doit conclure que la différence entre une lame et la suivante, vers les mêmes bords, est toujours égale à une ou plusieurs rangées de molécules soustraites. Or, on peut prendre ces rangées suivant diverses directions, que je commencerai par faire connaître, avant d'arriver au développement de la théorie.

Soit ABCD (fig. 55), une face d'un noyau que nous supposerons, pour plus de simplicité, être d'une forme cubique, sous-divisée en une multitude de petits carrés *a*, *b*, *c*, *d*, etc., qui soient les facettes extérieures d'autant de molécules de la même forme. D'après ce que j'ai dit plus haut, toutes ces molécules peuvent être conçues comme des unités employées par la cristallisation à la formation du noyau cubique, sans qu'il soit besoin d'avoir égard aux sous-divisions que ces unités pourraient être susceptibles de subir, et qui conduiraient à des molécules intégrantes d'une autre forme. Mais les différentes manières d'agir des lois auxquelles sont soumises dans leur arrangement les molécules qui produisent la matière surajoutée au noyau, exigent que nous considérions ces molécules tantôt comme continuant de faire la fonction d'unités, ce qui est le cas le plus ordinaire, tantôt comme formant des molécules d'un ordre supérieur, qui seront des assemblages des mêmes unités prises deux à deux, comme *a* et *b*, *c* et *d*, *k* et *l*, etc., ou trois à trois, comm *a*, *b* et *c*, *d*, *e* et *f*, *k*, *l* et *m*, etc., c'est-à-dire que dans ce dernier cas les forces d'où dépend la cristallisation agissent sur les molécules composées dont je viens de parler, suivant des lois analogues à celles qui ont lieu le plus communément par rapport à des molécules simples.

Or, des molécules soit simples, soit composées, sont censées former une rangée, lorsque les centres de leurs

faces extérieures sont sur une même ligne droite. Si les molécules sont simples, il y aura deux cas qui satisferont à cette condition; dans le premier, la ligne qui traverse les centres, et à laquelle je donne, pour abréger, le nom de *ligne centrale*, est parallèle à l'un des bords de la face primitive que l'on considère. Ainsi toutes les molécules désignées par *a*, *b*, *c*, *d*, etc. (fig. 56), dont les faces extérieures ont leurs centres sur la ligne FG, forment une rangée. Dans l'autre cas, la ligne centrale est parallèle à l'une des diagonales de la même face; ainsi les molécules désignées par *v*, *x*, *y*, *z*, *q*, *f*, dont les faces extérieures ont leurs centres sur la ligne NL parallèle à la diagonale AC, forment également une rangée.

Lorsque les molécules sont composées, la ligne centrale n'est parallèle ni à un côté ni à une diagonale, mais elle fait avec l'un et l'autre un angle qui varie suivant le degré de composition.

45. Supposons que les molécules simples soient liées deux à deux comme *a*, *b* (fig. 57); menons OK qui coïncide avec la diagonale du petit rectangle relatif aux deux molécules, auquel cas elle passera nécessairement par le centre de ce rectangle; les molécules simples désignées par *o* et *s*, *t* et *z*, *q* et *ε*, etc., formeront une rangée de molécules composées, semblables à celle dont j'ai parlé, en sorte que la ligne centrale TY sera parrallèle à OK.

Prenons les six molécules désignées par *k*, *l*, *m*, *a*, *b*, *c*, pour en composer une seule, dont la face

extérieure aura sa diagonale dans le sens de PR. Les molécules simples groupées six à six dans les espaces désignés l'un par γδζλ, un second par ζμνπ, un troisième par ισξτ, etc., formeront une rangée de molécules semblables à celle dont la ligne PR traverse la base diagonalement, de manière que la ligne centrale UZ sera parallèle à cette même ligne.

46. On peut donc considérer les deux lignes centrales dont l'une est parallèle au côté et l'autre à la diagonale, comme les deux extrêmes entre lesquelles les positions des autres lignes centrales peuvent varier presque à l'infini. Mais nous verrons dans la suite que cette variation est restreinte par la cristallisation de manière à ne pas dépasser un certain degré de simplicité, en sorte qu'ici comme dans un grand nombre d'autres phénomènes, l'observation prescrit des limites à la théorie, qui n'en connaîtrait aucune si elle restait abandonnée à elle-même.

47. C'est par des soustractions d'une ou plusieurs rangées de molécules, soit simples soit composées, que s'opèrent les décroissemens des lames appliquées sur le noyau. On appelle *décroissemens sur les bords* ceux dans lesquels la ligne centrale est parallèle aux bords; *décroissemens sur les angles* ceux dans lesquels la même ligne est tournée vers une diagonale, et *décroissemens intermédiaires* ceux dans lesquels la position de la ligne centrale est inclinée en même temps au côté et à la diagonale.

Venons maintenant aux applications :

Décroissemens sur les bords.

48. Soit AG (fig. 58) un prisme droit symétrique faisant la fonction de forme primitive à l'égard des cristaux d'une substance minérale ; ce prisme peut être conçu comme résultant de la superposition d'un certain nombre de lames carrées, situées parallèlement aux bases, et composées chacune d'un égal nombre de petits prismes semblables au prisme total, et il est bien évident que si la superposition continuait avec la même uniformité en partant des deux bases, le prisme ne ferait autre chose que s'accroître dans le sens de sa hauteur, en conservant la même épaisseur.

Supposons une suite de lames appliquées sur la base ABCD, et soumise à un décroissement sur les bords qui soit le même pour tous. La première lame aura vers chaque bord une ou plusieurs rangées de moins que dans le cas où le prisme aurait continué de croître en hauteur, sans varier dans son épaisseur. La seconde comparée à la première en différera du même nombre de rangées, et ainsi de suite.

Or, il est facile d'abord de concevoir que l'effet du décroissement poussé jusqu'à sa limite sera de produire une pyramide droite quadrangulaire ABCDO (fig. 32, pl. 2) qui reposera sur la base ABCD, et dont les faces seront interrompues par des angles alternativement rentrans et saillans, semblables à ceux que font entre eux les degrés d'un escalier, en sorte

que dans la réalité elles ne seront autre chose qu'un assemblage de lignes situées aux endroits des arêtes saillantes. Mais telle est la ténuité des molécules, que les inégalités dont il s'agit échapperont à l'œil, en sorte que les faces de la pyramide s'offriront sous l'aspect de plans continus, du moins en supposant que la cristallisation ait atteint tout le fini dont elle est susceptible.

49. Je n'ai considéré l'effet du décroissement que par rapport à la base supérieure ABCD de la forme primitive. Mais la symétrie avec laquelle agissent les lois de la structure exige qu'un pareil décroissement fasse naître sur la base inférieure une autre pyramide égale et semblable à la première, et à laquelle on peut appliquer tout ce que j'ai dit de celle-ci.

Soient $C\mu\nu\iota$, $C\epsilon\delta\gamma$, $C\mu\lambda\gamma$ (fig. 58) les trois faces analogues à CDAB, CBLG, CDFG, sur la molécule située en C.

La petite ligne $C\gamma$ perpendiculaire sur les arêtes $C\mu$, $\gamma\lambda$ sera ce que j'appelle *la dimension en hauteur*, rapportée à la molécule, et les lignes $C\mu$, $C\epsilon$, perpendiculaires l'une sur CB, l'autre sur CD, seront ce que je considère comme les dimensions en largeur relatives à la même molécule. Désignons $C\gamma$ par h, et $c\mu$ ou $c\epsilon$ par l.

Soit *emrs* (fig. 59) le même plan que (fig. 58), lequel passe par les milieux des arêtes AD, BC, perpendiculairement à la base ABCD. Soit de plus *cdig* (fig. 56) la coupe de la première lame de superposi-

tion, prise sur le même plan ; *fkap* celle de la seconde, *ltvq* celle de la troisième, etc., *mg* indiquera la différence entre la première lame et la seconde, dans le sens de la largeur, en sorte que s'il n'y a qu'une rangée de soustraite, on aura *mg* (fig. 59) $= C\mu$ (fig. 58) $= l$. S'il y a deux rangées soustraites, on aura $mg = 2\,l$, et ainsi de suite. Soit en général n le nombre de rangées soustraites ; on aura $mg = n \times l$.

50. Jusqu'ici nous avons fait abstraction de l'épaisseur des lames de superposition, et nous avons supposé tacitement qu'elle était égale à $C\gamma$ ou à une hauteur de molécule. Mais il peut arriver que chacune de ces lames ait une épaisseur double ou triple, etc. de celle d'une molécule, et que cette épaisseur se combine tellement avec la différence en largeur que l'effet du décroissement soit encore une pyramide. Dans ce cas, si nous désignons par n' le nombre d'épaisseurs de molécules contenues dans celle de chaque lame, nous aurons *gi* (fig. 56) $= n' \times h$.

Si l'on mène les droites *eo*, *mo*, tangentes aux points *d*, *k*, *i*, *a*, etc., elles seront les apothêmes des triangles DOA, COB (fig. 32), et si du point *o* (fig. 59) on abaisse *ob* perpendiculairement sur *em*, l'angle *omb* sera égal à l'incidence de l'une quelconque des faces de la pyramide DCBAO (fig. 32) sur la base ; en lui ajoutant 90^d on aura l'incidence de la même face sur le pan adjacent ; d'une autre part, l'angle *mob* (fig. 59) mesurera la moitié de l'incidence de l'une quelconque des mêmes faces, par

exemple de la face COB (fig. 32) sur la face DOA située du côté opposé.

Il est évident que tous les petits triangles *mgi*, *ipu*, *oqo*, etc., sont égaux et semblables entre eux, et de plus qu'ils sont semblables au triangle *mbo*. On donne le nom de *triangle mensurateur* à l'un quelconque de ces triangles, et spécialement à celui qui est situé à la naissance du décroissement, c'est-à-dire dans le cas présent au triangle *mgi*.

82. Supposons que la forme primitive soit un parallélipipède obliquangle AG (fig. 60), auquel cas les faces BCGL, DCGF feront avec la base ABCD des angles inégaux que nous supposons ici être obtus. Soit $r\gamma$ la molécule constructive située en C; les facettes $C\varepsilon\alpha\gamma$, $C\mu\varepsilon\gamma$ étant alors des parallélogrammes obliquangles, les lignes $C\pi$, $C\delta$ perpendiculaires l'une sur $\gamma\alpha$, l'autre sur $\mu\varepsilon$, ne coïncideront plus avec les côtés $C\gamma$, $C\alpha$. Soit *mgi* un triangle mensurateur relatif à un décroissement sur le bord BC. On aura comme ci-dessus $mg = n \times C\delta = n \times l$, et $gi = n' \times C\pi = n' \times h$; de plus l'angle *igm* sera égal à l'angle $\delta C\pi$ qui mesure l'incidence de CBLG sur ABCD. Donc, connaissant cet angle, ainsi que les lignes $C\delta$, $C\pi$, et de plus les quantités n, n', il sera facile d'avoir l'angle *img*, ou celui que fait la face produite par le décroissement avec la base ABCD. On voit aisément ce qu'il y aurait à faire pour construire le triangle mensurateur relatif à un second décroissement qui agirait parallèlement au bord CD. Les côtés de ce triangle analo-

gues à *mg* et *gi* seraient alors fonctions des perpendiculaires menées du point C sur *εν* et $\gamma\lambda$, et au lieu de l'angle *mgi* on aurait celui que fait CDFG avec ABCD.

52. Lorsque la relation entre $n \times l$ et $n' \times h$ est telle que n' étant égale à l'unité, n est égale à 2, ou 3, ou 4, etc. le décroissement est dit avoir lieu *en largeur*, par 2, 3, 4 rangées, etc., sur le bord qui lui sert de ligne de départ; lorsqu'au contraire n étant l'unité, n' est égale à 2, ou 3, ou 4, etc., le décroissement est dit avoir lieu *en hauteur*, par 2, 3, 4 rangées, etc. Ainsi, cette expression, *tel décroissement a lieu par 3 rangées en largeur sur tel bord*, suppose tacitement que l'épaisseur de chaque lame de superposition soit égale à une épaisseur de molécule; et cette autre expression, *tel décroissement a lieu par trois rangées en hauteur sur tel bord*, emporte la condition que la quantité dont chaque lame décroit dans le sens de la largeur, soit mesurée par une rangée de molécules.

Mais il peut arriver aussi que n et n' soient égales à des nombres différens et tous deux plus grands que l'unité; par exemple, que l'on ait $n=3$, $n'=2$, ou bien $n=4$, $n'=5$: alors le décroissement s'appelle *mixte*, parce qu'il participe des deux précédens. Dans le cas où $n=1$, et $n'=1$, on dit simplement que le décroissement a lieu par une rangée. Ce cas se rencontre dans plusieurs variétés qui appartiennent à diverses espèces de minéraux. Mais la loi qui le donne

[illegible] autres. [illegible] résultent de nouvelles [illegible], soit le prisme [illegible].

[illegible] primitive de la méso- [illegible] légèrement rhomboïdal [illegible] demi-diagonales OH, [illegible] quantités $\sqrt{9}$ et $\sqrt{8}$, et [illegible] de M sur M. Le [illegible] à la perpendiculaire [illegible] base sur un des côtés [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

est à NS, c'est-à-dire comme 2Or : NS, ou comme 2 : 1, ce qui donne 116d 33', pour l'incidence cherchée.

54. Je placerai ici une réflexion sur laquelle je me propose de revenir dans la suite avec de nouveaux développemens. J'ai déjà dit que la forme primitive ou le noyau d'un cristal n'était autre chose qu'une donnée prise dans la théorie, pour faciliter la détermination des différentes formes cristallines relatives à une même substance. Les dimensions de cette forme ramenée à sa véritable limite, lorsqu'elles ne sont pas données *à priori*, comme dans le cas du cube, du rhomboïde, du dodécaèdre rhomboïdal, etc., se déduisent de celles qu'il faut supposer à la molécule soustractive, pour que les décroissemens qui donnent les formes secondaires soient, en général, les plus simples possibles. Ce que je viens de dire sert à expliquer pourquoi, dans le cas dont je viens de parler, la cristallisation, qui ne consiste proprement que dans une réunion de molécules, soumises à un arrangement symétrique, substitue aux formes primitives indiquées par la théorie, des solides qui ont à la vérité leurs faces situées parallèlement à celles de ces formes, mais qui s'en écartent plus ou moins par le rapport de leurs dimensions. Ainsi, dans la variété de mésotype qui vient de nous occuper, le prisme a plus ou moins de hauteur relativement à son épaisseur, suivant les cristaux dans lesquels on le considère. Il suit de là que quand on dit des pyramides sur-ajoutées à ce prisme, qu'elles naissent d'un dé-

se combine avec d'autres, d'où
faces qui modifient soit les p... des bases de
interposé entre elles. ...oureusement

53. Soit AS (fig. 61), la ... ensions de cette
type, qui est un prisme ... apport que dans
dans lequel le rapport ... omme les pyra-
ON de la base, est ... celles qui seraient
qui donne 93d 22′ ... se, les faces qui
plus, la hauteur ... ent, dans les appli-
Or menée du ... qui leur correspon-
Soit OH = ... prement dite.
... liter les applications
ON = √8 ... e triangle mensurateur
... ceux auxquels nous les
La fig... peut supposer, par
substan... relatif au décroissement
quelle ... DCBO (fig. 32), soit situé
mina... par les arêtes CO, AO,
Prop... ens de la diagonale menée
des ... le triangle dont il s'agit;
(f... est censé appliqué sur la
d... nière que le point *c* (fig. 63)
... C (fig. 58), renfermera au-
... que le côté *gm* (fig. 59)
... Cu (fig. 58). Donc désignant
... agit, nous aurons *ct* (fig. 63)
... il est évident que son ex-
... celle du côté *gi* (fig. 59),
...-dire qu'elle sera $n' \times h$.
... mensurateur dont je viens

une l'incidence de l'une quelconque des ...ques de la pyramide (fig. 32) sur la base et en ajoutant 90^d à cette incidence on a que font entre elles les arêtes CO, CG, ou DF, etc.

56. Il arrive souvent que l'effet d'un décroissement s'arrête à un certain terme, en deçà de la limite vers laquelle il tendait. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, si la partie ajoutée au noyau (fig. 58) par l'effet du décroissement qui agit sur les bords de la base ABCD, au lieu d'être une pyramide complète, s'offrait sous l'aspect d'une pyramide tronquée parallèlement à sa base. Dans ce cas, les faces produites par le décroissement seraient des trapèzes adjacens par leurs bases supérieures à une face terminale semblable et parallèle à la base ABCD.

57. La baryte sulfatée nous offre un exemple de cette modification dans une variété représentée (fig. 64), et que je nomme *subpyramidée*. La forme primitive est un prisme droit rhomboïdal (fig. 65), dans lequel le rapport des demi-diagonales DP, CP et de la hauteur CG, est celui des nombres $\sqrt{12}$, $\sqrt{8}$ et $\sqrt{21}$. Le décroissement qui donne les faces *z*, *z*, etc. (fig. 64), a lieu par deux rangées en hauteur sur les quatre bords de la base ADCB (fig. 65).

Soient $C\epsilon\delta\gamma$, $C\mu\lambda\gamma$, $C\mu\nu\epsilon$, les facettes extérieures d'une molécule soustractive située en C. Menons C*d* perpendiculaire sur $\mu\nu$, et dont le prolongement *de* sera aussi perpendiculaire sur AD.

5..

Soit *cesg* (fig. 66) la coupe du noyau prise par un plan qui coïncide avec CG, C*e* (fig. 65), et soit *hdin* (fig. 66), la coupe de la première lame de superposition, *fkap* celle de la seconde, etc.; *cni* représentera le triangle mensurateur dans lequel $cn = Cd$ (fig. 65), et $ni = 2C\gamma$. Or, parce que les dimensions de la molécule soustractive sont proportionnelles à celles du noyau, $Cd : C\gamma :: Ce : CG$. Soit $DP = \sqrt{12}$, AP ou $CP = \sqrt{8}$, $CG = \sqrt{21}$. Nous aurons

$AD = \sqrt{(DP)^2 + (AP)^2} = \sqrt{20}$. $Ce \times AD = AP \times DB$, ou $Ce \times \sqrt{20} = \sqrt{8.48}$. Donc $Ce = \sqrt{\frac{96}{5}}$... Donc $Ce : CG :: \sqrt{\frac{96}{5}} : \sqrt{21} :: \sqrt{32} : \sqrt{35} :: Cd : C\gamma$. Donc $cn : ni$ (fig. 66) $:: \sqrt{32} : 2\sqrt{35} :: \sqrt{8} : \sqrt{35}$. D'ailleurs l'angle *cni* est droit; d'après ces données, l'angle *icn* est de $64^d\,26'$, et l'angle *cin* de $25^d\,34'$, d'où il suit que l'incidence de *z* sur M (fig. 64) est de $154^d\,26'$, et celle de *z* sur P de $115^d\,34'$.

38. J'ai supposé que le décroissement qui donne les facettes *z*, *z* avait une marche ascendante en dessus des bords CD, CB, etc. (fig. 65), de la base du noyau, en sorte qu'il tendait à produire une pyramide au-dessus de cette base. Mais on peut supposer, au contraire, que le décroissement ait une marche descendante en dessous des mêmes arêtes, de manière que les faces qui en résultent, ayant les mêmes inclinaisons que dans le cas précédent, tendent à se réunir sur des arêtes communes situées au-

dessus des lignes *tx*, *sx* (fig. 64), qui divisent transversalement les faces M, M en deux parties égales. Alors la base P (fig. 65) sera censée rester intacte, et les lames de superposition partiront des faces M, M, pour s'appliquer les unes sur les autres. On conçoit aisément que si le décroissement atteignait sa limite, la surface du cristal serait composée, dans le sens latéral, de huit trapèzes accolés deux à deux par leurs grandes bases, et compris entre deux faces terminales parallèles et semblables aux bases de la forme primitive. Ayant prolongé indéfiniment la ligne *ic* (fig. 66), prenons sur *cg* une partie *cz* égale à *in*, et menons *zo* perpendiculaire sur *cg*. Le triangle *czo* deviendra mensurateur relativement au décroissement dont nous venons de parler, et il est évident qu'il sera égal et semblable au triangle *inc*, en sorte que *cz* étant égale à *in*, par la construction, *oz* sera égale à *cn*. Donc, puisque *in* est double de Cγ (fig. 65), le décroissement aura lieu par deux rangées en largeur, entre les bords BC, GL d'une part, et CD, GF de l'autre. Si dans le décroissement rapporté aux bases, comme dans la première hypothèse, il y avait trois rangées de soustraites en hauteur, celui qui lui correspondrait vers les faces latérales se ferait par des soustractions de trois rangées en largeur, et ainsi de suite pour les décroissemens plus composés.

59. Concluons de là que si l'on suppose deux décroissemens qui agissent de part et d'autre d'une

même arête, de manière à produire des faces qui soient sur un même plan, chacun d'eux sera l'inverse de l'autre. Ainsi, un décroissement mixte qui aurait lieu d'un côté par trois rangées en largeur, et par deux en hauteur, aurait pour analogue, du côté opposé, un décroissement par deux rangées en largeur et trois en hauteur.

Dans les cas semblables à celui de la fig. 32, pl. 2, où l'effet du décroissement est de produire des pyramides appliquées sur les bases du noyau, il est naturel de considérer la marche du décroissement comme ascendante. Si, au contraire, les faces produites par le décroissement se réunissent sur des arêtes situées latéralement, en masquant les faces M, M (fig. 65), il convient de considérer la marche du décroissement comme descendante.

[illegible] Lorsque l'effet du décroissement se borne à faire naître à la place des bords CD, BC, des faces *z*, *z* [illegible], qui ne parviennent pas à se rencontrer, il peut arriver que l'effet du décroissement soit beaucoup plus voisin de la limite à laquelle répondent les pyramides complètes, que de celle qui réside dans la réunion des faces *z*, *z*, au-dessus des arêtes *tx* et *xs*. Entre les deux limites il est une multitude d'intermédiaires que les différens cristaux de la même variété sont susceptibles d'offrir. Mais comme la manière de représenter le décroissement doit être uniforme, l'analogie peut, dans ces sortes de cas, indiquer celle qui doit être préférée. Ainsi, ayant remarqué

que les facettes *z*, lorsqu'elles se retrouvent sur des variétés de baryte sulfatée, différentes de celle qui vient de nous occuper, y sont combinées avec d'autres facettes dues à des décroissemens dont l'expression la plus simple et la plus naturelle est celle qui suppose leur marche ascendante, j'ai assimilé à cette marche celle du décroissement qui donne les facettes *z*, en supposant qu'elle ait lieu dans le même sens.

Il peut arriver enfin que des faces analogues à *z*, *z* se prolongent de part et d'autre des lignes *lr*, *rn*, jusqu'au point de masquer entièrement les bases P et les pans M, M de la forme primitive, auquel cas le solide secondaire sera un octaèdre rhomboïdal. Le choix entre les deux manières de représenter l'effet du décroissement devient alors indifférent en lui-même. Cependant, si aucune raison particulière ne décide de la préférence, je crois plus convenable de la donner à l'expression qui suppose que le décroissement ait une marche ascendante, parce que l'idée que fait naître l'octaèdre dont il s'agit, d'après les relations de position qui existent entre ses différentes faces et son axe vertical, est celle d'un solide composé de deux pyramides jointes base à base, et qu'on se représente naturellement une pyramide comme un assemblage de lames décroissantes superposées depuis la base jusqu'au sommet.

61. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'exposer un résultat général d'observation relatif à l'influence qu'a sur les décroissemens le rapport qui

même arête, de manière
soient sur un même pla
verse de l'autre. Ainsi, u
aurait lieu d'un côté par
par deux en hauteur, au
opposé, un décroissemen
geur et trois en hauteur.

Dans les cas semblable
où l'effet du décroisseme
mides appliquées sur le
turel de considérer la mar
ascendante. Si, au contr
le décroissement se r
latéralement, en mas
il conviendra de co
ment comme desce

60. Lorsque l'
faire naître à la p
(fig. 64), qui n
peut arriver qu
coup plus voisi
pyramides co
la réunion d
et *sx*. Entre
d'intermédi
variété so
nière de
forme, l'
quer cel

ne à indiquer ici ce résultat aussi simple , auquel j'ai donné le nom de *loi de sy-* proposant d'en développer toutes les con- dans un article qui lui sera spécialement

D'après les conditions énoncées ci-dessus, si les douze bords d'un cube AO′ (fig. 67), que allons maintenant considérer comme forme itive, un seul subit une loi de décroissement, les autres la subiront également. Supposons que écroissement ait lieu par une rangée, les lames superposition empilées sur les six faces du cube uiront autant de pyramides triangulaires, dont bases se confondront avec elles, ainsi qu'on le (fig. 68), et il est clair que les faces de ces pyra- es seront inclinées de 45ᵈ sur celles du noyau. le cas présent, où les deux décroissemens qui sent des deux côtés de chaque bord du cube ont par une rangée étant la limite de tous les cas où décroissemens sont inverses l'un de l'autre, les es qui en résultent sont aussi sur un même plan. onc les vingt-quatre faces qui composent la surface les six pyramides se réduisent à douze faces distinctes qui sont des rhombes égaux et semblables *s*O*t*I, *s*OE*r*, *t*O*r*O′, etc. (fig. 68 et 69). Le dodécaèdre rhomboïdal que nous avons vu au rang des formes primitives se retrouve ici parmi les formes secondaires, et nous le verrons dans la suite reparaître sous le même titre comme modification de l'octaèdre régulier.



existe s[illegible]
différen[illegible] ...nd de la
ramené [illegible] ...d'être dé-
1°. Si [illegible] ...e nombre
une form[illegible] ...t de 4913,
d'une m[illegible] ... y rendre
à son im[illegible] ... six faces du
resteront [illegible] ... faces qui se
a lieu pa[illegible]
posent d[illegible] ... des axes qui
les autres [illegible] ..., tels que *s*, *s'*
autant d[illegible] ... quatre de ses
remment [illegible] ...les que *rOtO'*,
que la v[illegible] ... que ces faces
tombât [illegible] ... d'une autre
qu'ils ne [illegible] ... axes qui passent
dans les [illegible]
ou deux [illegible]
arriver q[illegible]
croissem[illegible]
ou que l'u[illegible]
l'autre res[illegible]
dance né[illegible]
dont chac[illegible]
Les con[illegible]
à une autr[illegible]
condaire [illegible]
bles sur la[illegible]
blables en[illegible]

...ement du Jardin du
... mêmes formes dont
... ont cet avantage,
... sens, saisit plus
... décroissemens
.... D'autres so-
... mécanique du
...tes dont il est
... solides simples,
... que nous avons
... à laquelle il
... différence
... les cristaux

par deux angles solides trièdres, tels que O, A′, le dodécaèdre aura six de ses faces situées parallèlement à cet axe, telles que *r*E′*s*′O′, O′*s*′I′*t*, *t*I′*r*′I, I*r*′A*s*, *s*A*t*′E, E*t*′E′*r*, lesquelles, à cause de la régularité de la forme primitive et de l'action symétrique des décroissemens, font entre elles des angles égaux ; et comme la même disposition se répète dans tous les sens, il en résulte que l'incidence mutuelle de deux faces quelconques adjacentes est de 120^{d}.

La cristallisation nous offre un exemple du décroissement dont je viens de parler, dans une substance pierreuse à laquelle j'ai donné le nom d'*aplome*. La même structure a lieu dans une variété de fer sulfuré où les faces du dodécaèdre rhomboïdal se combinent avec huit facettes triangulaires situées à la place des angles solides trièdres, et qui dépendent d'une loi que je ferai connaître dans la suite.

64. Pour que la lame située au sommet de chaque pyramide se réduise à un simple cube, ainsi que le représente la figure 70, il faut supposer que le côté du noyau soit composé d'un nombre impair d'arêtes de molécules. Dans cette hypothèse, qui est la plus naturelle que l'on puisse faire, les nombres de molécules des lames consécutives, en partant des sommets des pyramides, forment une série dont les différens termes sont les carrés des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, etc., et dont le terme général du rang n est $(2n-1)^2$. Si l'on prend la série en sens inverse, c'est-à-dire en partant des faces du noyau, et si l'on

Désignons par C le nombre d'arêtes comprises dans le côté de ce noyau, et par n' le rang d'un terme quelconque, les nombres de celles que renferment successivement les lames de superposition, formeront la progression C — 2, C—4, C—6, C—8, etc...... C— $2n'$, et les nombres de molécules qui composent ces lames seront égaux aux carrés des termes de cette même série, de sorte que la somme de toutes les molécules comprises dans la lame du rang n' sera $(C-2n')^2$.

La quantité C étant donnée, il est facile de connaître le nombre total N des lames de superposition qui composent une même pyramide, en faisant attention que N est le nombre des termes d'une progression arithmétique décroissante, C — 2, C— 4, C—6, C—8, etc...., dont le dernier terme est l'unité. En appliquant ici les formules relatives à ce genre de progressions, on trouvera $N=\frac{C-1}{2}$.

55. On peut déterminer de même en fonction de C le nombre de tous les cubes élémentaires dont le dodécaèdre est l'assemblage. Pour y parvenir, j'observe que le nombre de ceux qui composent l'une quelconque des six pyramides superposées aux faces du noyau est égal à la somme des carrés des termes de la suite arithmétique 1.3.5.7.9....C—2. Or, si l'on désigne en général par a le premier terme d'une pareille suite, par u le dernier, par r la différence entre deux termes consécutifs, et par s' la

somme des carrés de tous les termes, on a la formule

$$s' = \frac{2(u^3 - a^3) + 3r(u^2 + a^2) + r^2(u - a)}{6r} \text{ (1).}$$

---

(1) Cette formule, dont l'usage s'étend à toutes les questions du genre de celle qui nous occupe, ne faisant point partie des élémens ordinaires de l'Algèbre, je crois utile d'en donner ici une démonstration simple, qui dispensera le lecteur de recourir aux ouvrages qui en traitent d'une manière spéciale.

Soient a, b, c, d, ... t, u, les termes de la progression dont il s'agit, et n leur nombre. Déterminons d'abord leur somme, que je représenterai par s. Nous aurons $b = a + r$; $c = b + r$; $d = c + r$; ..... $u = t + r$; et en élevant chaque membre de ces équations au carré,

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + 2ar + r^2, \\ c^2 &= b^2 + 2br + r^2, \\ d^2 &= c^2 + 2cr + r^2, \\ &\vdots \\ u^2 &= t^2 + 2tr + r^2. \end{aligned}$$

Egalant la somme des premiers membres de ces équations à celle des seconds, supprimant les quantités communes aux deux sommes, et transposant a^2 dans la première, on a

$$u^2 - a^2 = 2r(a + b + c + d + \ldots + t) + r^2(n - 1).$$

Or,

$$a + b + c + d + \ldots + t = s - u;$$

donc

$$u^2 - a^2 = 2r(s - u) + r^2(n - 1);$$



[illegible] substitue
[illegible] elle de-
[illegible] l'ensemble des
[illegible] nant C^3,
[illegible] mentaires
[illegible] $C^3 - 3C^2 + 2C$.

[illegible]

[illegible] même marche,
[illegible] les carrés, nous

[illegible]

[illegible] à celle des se-
[illegible] dispositions analogues

[illegible]

[illegible] leurs valeurs expri-

[illegible]

Si l'on suppose $C = 17$ comme dans la figure, le nombre dont il s'agit sera égal à 8993.

Si C devient infini, alors $3C^2$ et $2C$ s'évanouissent devant $2C^3$, ce qui indique que la solidité du dodécaèdre considéré comme corps géométrique est double de celle du noyau. Effectivement, si l'on mène par les arêtes du noyau des plans qui passent en même temps par le centre, ils détacheront six pyramides égales à chacune de celles qui sont le résultat du décroissement.

66. Supposons maintenant que chaque bord du cube serve de ligne de départ à deux décroissemens, dont l'un ait lieu d'un côté par deux rangées en largeur, et l'autre du côté opposé par deux rangées en hauteur. On voit d'abord que l'un des décroissemens étant l'inverse de l'autre, les deux faces qui en naîtront se trouveront sur un même plan, d'où il suit que l'on aura encore un dodécaèdre, mais qui devra différer du dodécaèdre rhomboïdal par les figures et les inclinaisons de ses faces. On conçoit de plus que le résultat sera variable suivant les diverses manières dont les directions des décroissemens seront combinées entre elles. Si l'on suppose, par exemple, que le décroissement en largeur agisse parallèlement aux quatre bords des deux faces AEOI, A'E'O'I' (fig. 67), il produira deux pyramides qui reposeront sur ces mêmes faces. Mais les autres décroissemens qui auront lieu parallèlement aux bords des faces latérales ne pourront produire de semblables pyramides. Ainsi,

Mais i[illegible] accroissement sur les
dans [illegible] accroissement par
vient [illegible] l'autre côté des
six p[illegible] le même que celui
[illegible] que l'on arrange
on o[illegible] OO', II', la simili-
qui [illegible] aux différentes faces
—— [illegible] qui est contraire à la
ou bi[illegible] ci-dessus. Le seul
[illegible] les deux condi-
[illegible] que des dé-
d'où [illegible] adjacentes à un
[illegible] EOO'E', OO'I'I,
M[illegible] TN, menées
en s[illegible] suivant trois
aur[illegible] Supposons que
[illegible]

[illegible] deux triangles
[illegible] T est le même
[illegible] le côté T*h*
[illegible] perpen-
et [illegible] (fig. 71)
con[illegible] dans le sens de la
aux [illegible] (fig. 71)
[illegible] rangées en
Mett[illegible] EA (fig. 67),
mées [illegible] deux rangées
[illegible] et qui a
[illegible]

Soient P*ux*, P*ym* (fig. 72) deux autres triangles mensurateurs dans lesquels le point P est le même que (fig. 67), le côté P*u* (fig. 72) étant dans le sens de PQ (fig. 67), et le côté P*y* (fig. 72) étant situé sur le carré EOO′E′ (fig. 67), perpendiculairement à la ligne RS; d'où il suit que le triangle P*ym* (fig. 72) se rapporte au décroissement par deux rangées en largeur, qui a lieu en allant de EO vers E′O′ (fig. 67), et le triangle P*ux* au décroissement par deux rangées en hauteur qui est l'inverse du précédent, et qui a lieu en allant de EO vers AI (fig. 67).

68. On voit par la disposition de ces triangles que les faces produites en vertu du décroissement qui agit parallèlement aux bords OI, EA, étant inclinées sur les bases d'une quantité égale à l'angle *g*T*h* (fig. 71), tandis que celles qui résultent du décroissement dont les directions sont parallèles aux bords EO, AI (fig. 67), faisant avec les mêmes bases un angle beaucoup plus ouvert, mesuré par *x*P*u* (fig. 72), les quatre faces ne se réuniront plus en un point commun, comme dans l'exemple précédent; mais les premières, qui convergent davantage l'une vers l'autre, iront se rencontrer sur une arête commune située au-dessus de PQ (fig. 67), en sorte qu'elles seront des trapèzes IO*pq*, AE*pq* (fig. 73), tandis que les deux autres seront des triangles OE*p*, AI*q*, qui auront leurs sommets aux extrémités de l'arête *pq*. Les mêmes effets se répéteront sur les faces OII′O′, EOO′E′ (fig. 67); mais les lignes de jonction *pq*,

[illegible] aux trois faces [illegible] opposées) ayant [illegible] entre elles, il en ré-[illegible] que OtI, EpO, etc., [illegible] trapèze situé de l'autre [illegible] la surface du solide [illegible] pentagones égaux [illegible] (fig. 74).

[illegible] maintenant que dans chaque [illegible] les côtés Ot, It, adja-[illegible] par une suite de la [illegible] symétrie avec laquelle [illegible] De plus, chaque trapèze [illegible] côtés communs avec les [illegible] $O'nI'$, savoir, Ot, Os, [illegible] ces mêmes côtés sont égaux [illegible] ligne tn, qui peut être con-[illegible] commune des pentagones [illegible] trouverai ailleurs que, dans le cas [illegible] petite que chacun des autres [illegible] que je déterminerai, et je [illegible] développemens sur les pro-[illegible] il s'agit, qui diffère essen-[illegible] régulier de la Géométrie, [illegible] minéralogistes l'ont confondu.

[illegible] pour le présent, à indiquer l'in-[illegible] pentagones, aux endroits où ils [illegible] commune, par exemple, [illegible] $tnI'S1$. Cette incidence

est évidemment le double de l'angle T*gh* (fig. 71), qu'il est facile de déterminer, d'après l'observation que le triangle *h*T*g* est rectangle en *h*, et que son côté T*h* est double du côté *hg*, en conséquence de ce que le décroissement qu'il sert à mesurer a lieu par deux rangées de molécules cubiques. En partant de ces données, on trouve que l'angle T*gh*$=63^{d}\,26'\,6''$, d'où il suit que l'incidence cherchée est de $126^{d}\,52'\,12''$.

On voit (fig. 75) une imitation de la structure qui vient d'être exposée, du même genre que celle que présente la figure 70, et qui se rapporte au dodécaèdre rhomboïdal.

70. Les lames de superposition empilées sur les diverses faces du cube, dans la variété qui nous occupe, étant de niveau deux à deux dans le sens du décroissement en hauteur, tandis que dans celui du décroissement en largeur elles diminuent sans interruption, il en résulte que les nombres de molécules dont elles sont successivement composées forment deux séries, dont l'une comprend tous les cas où le rang n' d'un terme donné est un nombre impair, et l'autre ceux où il est un nombre pair.

Pour trouver les formules relatives à ces deux espèces de cas, désignons par c le nombre d'arêtes contenues dans le côté du noyau; soit g la plus grande dimension des bases rectangulaires de l'une quelconque des lames de superposition, et p la plus petite, auquel cas le produit gp représentera généralement le nombre de molécules comprises dans chaque

lame de superposition. Si l'on prend les séries en partant des faces du noyau, il est aisé de voir que p sera égal successivement à $c-4$, $c-8$, $c-12$, $c-16$, etc., c'est-à-dire qu'en général il sera égal à $c-4n'$. D'une autre part, g sera égal successivement à $c-2$, $c-2$, $c-4$, $c-4$, $c-6$, $c-6$, etc.; c'est-à-dire que si n' est un nombre impair, on aura $g=c-n'-1$, et si n' est un nombre pair, on aura $g=c-n'$. Donc dans la série des nombres impairs $gp=(c-n'-1)(c-4n')$, et dans celle des nombres pairs $gp=(c-n')(c-4n')$, expressions qui ne diffèrent qu'en ce que le premier facteur de l'une est moindre d'une unité que celui de l'autre.

Pour que g soit égal à l'unité dans la dernière lame, il faut que le nombre d'arêtes de molécules contenues dans chaque bord du noyau soit un multiple de 4 augmenté de l'unité, en sorte que si l'on désigne par N le nombre total des lames, on doit avoir $c-4N=1$. Donc, en général, $c=4N+1$. Si l'on substitue cette valeur de c dans les formules précédentes, celle qui est relative aux nombres impairs deviendra

$$gp=(4N-n')(4N-4n'+1),$$

et celle qui se rapporte aux nombres pairs sera

$$gp=(4N-n'+1)(4N-4n'+1),$$

expressions qui ne diffèrent que par l'addition d'une unité dans le premier facteur de la seconde.

La figure [illegible] a été construite dans l'hypothèse d'un noyau dont le côté renfermerait dix-sept arêtes

de molécules. Donc $c=17$. Or, la formule $c-4N=1$ donne $N=\frac{c-1}{4}$. Donc ici $N=4$. Donc le nombre de molécules contenues dans la troisième lame, prise pour exemple, ou $(4N-n')(4N-4n'+1)$ sera

$$(16-3)(16-12+1)=13.5=65;$$

et le nombre de molécules contenues dans la quatrième lame, ou $(4N-n'+1)(4N-4n'+1)$ sera

$$(16-4+1)(16-16+1)=13.$$

Le solide que nous considérons ici diffère du dodécaèdre rhomboïdal (fig. 70), en ce que, dans celui-ci, la dernière lame se réduit toujours à un simple cube, au lieu que dans l'autre le nombre des molécules qui composent la lame correspondante dépend de celui dont le noyau est l'assemblage.

72. Proposons-nous maintenant de déterminer en fonction de c le nombre de cubes élémentaires qui composent ce dodécaèdre.

Continuons de partager l'ensemble des lames de superposition appliquées sur chaque face du noyau en deux séries, que nous prendrons dans un ordre inverse de celui que nous avons supposé plus haut, c'est-à-dire en allant vers le noyau, en sorte que les termes dont le rang était pair deviendront ceux d'un rang impair, et réciproquement.

Soit dans le cas présent g la plus grande dimension, et p la plus petite dimension de la première lame de chaque série; soit r' la différence entre deux

grandes dimensions consécutives, r'' celle entre les petites dimensions correspondantes, et n le nombre des lames; on aura successivement pour les nombres de cubes qu'elles renferment

$$gp;$$
$$(g+r')\ (p+r'') = gp + pr' + gr'' + r'r'';$$
$$(g+2r')(p+2r'') = gp + 2pr' + 2gr'' + 4r'r'';$$
$$(g+3r')(p+3r'') = gp + 3pr' + 3gr'' + 9r'r'';$$
$$(g+4r')(p+4r'') = gp + 4pr' + 4gr'' + 16r'r'';$$
$$\vdots$$
$$[g+(n-1)r'][p+(n-1)r''] = gp + (n-1)pr' + (n-1)gr'' + (n-1)^2 r'r''.$$

Réunissant toutes ces quantités, on aura pour l'expression générale de la somme S des lames,

$$S = ngp + [1+2+3+4+\ldots+(n-1)](pr'+gr'') + [1+4+9+16+\ldots+(n-1)^2]r'r''.$$

Or, si l'on applique aux deux séries que renferme cette expression, les formules de la page (77), on trouvera

$$1+2+3+4+\ldots+(n-1) = \frac{n^2-n}{2},$$

et

$$1+4+9+16+\ldots+(n-1)^2 = \frac{2n^3-3n^2+n}{6};$$

Donc l'équation ci-dessus devient

$$S = ngp + \frac{n^2-n}{2}(pr'+gr'') + \frac{2n^3-3n^2+n}{6}r'r''.$$

Maintenant, si nous supposons que la première lame de la série des termes impairs se réduise à une simple

rangée, nous aurons pour cette série, $p=1$; et pour celle des termes pairs $p=5$.

Dans le premier cas,

$$S=ng+\frac{n^2-n}{2}(r'+gr'')+\frac{2n^3-3n^2+n}{6}r'r'';$$

et dans le second,

$$S=5ng+\frac{n^2-n}{2}(5r'+gr'')+\frac{2n^3-3n^2+n}{6}r'r''.$$

Les valeurs de r', r'', g et n, sont les mêmes dans les deux cas. Si donc on réunit les seconds membres de ces équations, on aura l'ensemble des deux séries, ou

$$6ng+(n^2-n)(3r'+gr'')+\frac{2n^3-3n^2+n}{3}r'r''.$$

Nous avons trouvé plus haut (page 85) $N=\frac{c-1}{4}$; N désignant le nombre total des lames comprises dans les deux séries. Or, $N=2n$; donc, $n=\frac{c-1}{8}$. D'une autre part, g est égal à c moins 2 pris autant de fois que n renferme d'unités. Donc $g=c-2n=\frac{3c+1}{4}$; Enfin $r'=2$, $r''=8$. Substituant dans l'expression ci-dessus les valeurs de n, g, r', r'', et réduisant, on aura $\frac{11c^3-54c^2+43c}{96}$. Multipliant par 6, et ajoutant c^3, qui est le nombre des cubes que renferme le noyau, on obtiendra la somme totale de ceux dont le dodécaèdre est l'assemblage, ou $\frac{27(c^3-2c^2)+43c}{16}$.

[illegible] comme dans la figure 75, [illegible] pour la somme des cubes élémen-[illegible] infini, auquel cas $2c^3$ et $43c$ [illegible] expression se réduit à $\frac{27}{16}c^3$; c'est-à-[illegible] considère le dodécaèdre comme [illegible] sa solidité sera à celle du [illegible] que l'on peut démontrer d'ail-[illegible] direct.

[illegible] variété de fer sulfuré (fig. 76) [illegible] d'un décroissement analogue à [illegible] naissance au dodécaèdre à faces [illegible] qui a lieu par quatre rangées en [illegible] et par quatre rangées en hau-[illegible]. Dans les cristaux observés [illegible] décroissement n'atteint pas sa limite, de [illegible] sur la surface du cristal secondaire [illegible] M parallèles aux faces du noyau, [illegible], données par les décroisse-[illegible]. La face h'' située à la droite [illegible] résulter du décroissement par [illegible] largeur, si dans le triangle Thg [illegible], on trouve que l'angle Tgh [illegible] il suit que l'angle gTh est [illegible] donne $165^d 57' 49''$ pour l'inci-[illegible] (fig. 76), et $104^d 2' 11''$ pour celle [illegible]

[illegible] maintenant le prisme droit rec-[illegible] (fig. 77), dans lequel le

rapport des côtés CD, CB, CG est celui des nombres $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$, et qui est la forme primitive de la cymophane. Les côtés dont il s'agit étant dans trois cas différens, si l'un quelconque d'entre eux, tel que CB, sert de ligne de départ à un décroissement, il n'est pas nécessaire que les deux autres en subissent un semblable, et il peut même arriver que ceux-ci restent libres; il faudra seulement que le même décroissement se répète sur les trois bords AD, FN, GL qui sont identiques au premier.

C'est ce que l'on observe dans la variété de cymophane représentée (fig. 78), et que je nomme *anamorphique*. L'effet du décroissement, qui a lieu par une seule rangée sur les quatre bords désignés, est de produire au-dessus de chaque base, telle que ABCD (fig. 77), un prisme triangulaire BCOKAD (fig. 78), appliqué par un de ses pans sur cette base, et dont les deux autres pans BCOK, ADOK sont la somme des bords décroissans sur les lames de superposition. Il est facile de voir que dans le triangle mensurateur *abc* (fig. 79), qui se rapporte ici à la face BCOK (fig. 78), le côté horizontal *ab* (fig. 79), est au côté vertical *ac* comme CD est à DF ou CG, c'est-à-dire comme $\sqrt{6} : \sqrt{2}$, ou comme $\sqrt{3} : 1$, d'où il suit que l'angle *cba* (fig. 79) = 30^d. Ainsi l'incidence de BCOK (fig. 78) sur BCGL sera de 120^d. J'appelle cette variété *anamorphique*, parce que si on lui faisait prendre la position en apparence la plus naturelle d'après son aspect extérieur, qui est celle

d'un prisme hexaèdre, la base M étant alors située horizontalement, la forme primitive se trouverait comme renversée.

76. Dans toutes les variétés que nous avons considérées jusqu'ici, les lames de superposition décroissent de tous les côtés à la fois, ou si elles ne décroissent que vers deux de leurs bords, comme dans la cymophane anamorphique (fig. 78), les autres bords ne font autre chose que se mettre de niveau entre eux, en restant sur le prolongement des faces M du noyau. Mais il existe des variétés dans lesquelles certains bords, sans être soumis à aucun décroissement, subissent des variations qui secondent les effets des décroissemens relatifs à d'autres bords, et concourent avec ceux-ci vers le but de la cristallisation. Nous allons en citer quelques exemples.

Reprenons le dodécaèdre à triangles scalènes (fig. 80) que j'ai déjà cité comme ayant pour noyau le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, et qui est situé de manière que les petits côtés EO, OI, IK, etc., de ses faces triangulaires se confondent avec les bords inférieurs de ce rhomboïde; d'où l'on voit qu'il résulte d'un décroissement dont l'effet se répète des deux côtés de chacun des mêmes bords, tandis que les bords supérieurs AE, AI, etc., ou A'H, A'K, etc., sont libres de tout décroissement. Or, en même temps que les lames de superposition diminuent vers les premiers bords, elles s'alongent vers les seconds, de manière à envelopper les parties du noyau adja-

centes aux sommets A, A'; c'est-à-dire que la cristallisation agit à l'égard de ces mêmes parties comme elle ferait dans le cas où le décroissement étant nul, le noyau s'accroîtrait dans tous les sens, en conservant sa forme.

77. Il suit de là que la mesure des décroissemens ne se détermine pas d'après les différences entre les lames de superposition considérées dans toute leur étendue, mais seulement d'après les quantités dont elles se dépassent mutuellement vers les parties qui sont soumises à ces décroissemens. Tout le reste est censé être compris tacitement dans la solution des problèmes. La théorie n'a même besoin que de considérer ce qui se passe à l'origine de chaque décroissement, parce que la première lame de superposition étant donnée, on a un triangle mensurateur qui sert à déterminer la position du plan produit par le décroissement. Cependant il n'est pas indifférent de pouvoir se rendre compte à soi-même de tous les détails relatifs à la structure d'un cristal, de manière que si l'on avait à sa disposition un certain nombre de petits solides semblables aux molécules soustractives, on pût les arranger comme par assises autour d'un noyau donné, dans un ordre conforme à celui de la nature, et produire ainsi une imitation artificielle du travail de la cristallisation. Je vais en conséquence faire en quelque sorte l'analyse d'une structure analogue à celle qui nous occupe ici, en ayant égard à toutes les variations particulières, à



l'aide desquelles les lames composantes concourent, comme de concert, à l'effet qui résulte de leur ensemble.

78. Pour revenir au dodécaèdre dont j'ai parlé, et que je nomme *chaux carbonatée métastatique*, la théorie prouve que le décroissement dont il dépend a lieu par deux rangées. La figure 81 représente l'espèce de pyramide qui s'est formée au-dessus du sommet supérieur du noyau, lequel se trouvant ainsi en partie à découvert, permet de saisir plus facilement la marche de la structure.

Si l'on suit l'ordre des lames de superposition qui s'appliquent trois à trois les unes sur les autres, en partant des faces du noyau, on voit que les trois premières, par exemple, au lieu de rester de niveau vers leurs parties supérieures, avec les faces adjacentes du noyau, s'étendent vers ces mêmes parties par l'addition d'une rangée de molécules, laquelle est commune à deux lames. Les trois lames suivantes non-seulement s'étendent pour recouvrir cette rangée additionnelle, mais prennent un accroissement ultérieur, par l'addition d'une nouvelle rangée qui est de même commune à deux d'entre elles. Cette distribution, qui se répète dans toute la hauteur de la pyramide, est nécessaire, pour éviter les angles rentrans qui sont exclus par la cristallisation, au moins dans les cristaux solitaires.

On peut considérer l'assortiment des trois lames de superposition situées à une hauteur quelconque,

comme formant une couche composée de petits rhomboïdes semblables au noyau. Ainsi la dernière couche qui répond au sommet *s* (fig. 80), a pour élémens sept petits rhomboïdes. C'est une suite de ce que sa partie concave, dans laquelle est emboîtée la couche suivante, a une capacité égale à un seul rhomboïde, en sorte que l'ensemble de cette capacité et de la couche forme un rhomboïde total qui est le plus petit possible, parmi tous ceux qui sont des assemblages de rhomboïdes élémentaires, puisque son côté est seulement égal à deux arêtes de molécule. Le même raisonnement s'applique à toutes les autres couches, dont chacune, considérée en elle-même, n'est autre chose qu'un rhomboïde évidé à l'endroit par lequel elle s'applique sur la couche inférieure.

79. Il est facile de déterminer le nombre de rhomboïdes élémentaires qui composent une couche d'un rang donné. Ce nombre étant constant relativement à la couche terminale, que nous supposons appartenir au *minimum* des rhomboïdes composés de rhomboïdes simples, nous allons d'abord renverser l'ordre, en prenant la couche dont il s'agit pour la première. Cela posé, je remarque que chaque couche peut être considérée, ainsi que je l'ai déjà dit, comme un rhomboïde dont on aurait retranché un autre rhomboïde plus petit, à l'endroit où cette couche s'applique par sa concavité sur la convexité de la couche suivante. Soit x le côté du premier rhomboïde. Comme chaque couche n'a que l'épaisseur d'une molécule, il est fa-

cile de voir que $x-1$ désignera le côté du second rhomboïde, ou de celui auquel répond la concavité de la couche dont il s'agit. Donc le côté du rhomboïde auquel répond la partie cachée de la couche suivante sera aussi $x-1$; mais, à cause du décroissement par deux rangées, le côté du rhomboïde auquel appartient cette dernière couche, considérée dans sa totalité, est plus grand de deux unités que celui du rhomboïde relatif à la partie cachée : donc son expression sera $x-1+2$, ou $x+1$. Mais x est le côté du rhomboïde auquel répond la couche précédente; donc les côtés des rhomboïdes auxquels appartiennent les différentes couches, prises en partant du sommet, forment une progression arithmétique croissante, dans laquelle la différence entre deux termes consécutifs est l'unité. Donc puisque le côté du rhomboïde relatif à la première de toutes les couches est 2, la série des différens côtés sera 2, 3, 4, 5, 6, etc., dans laquelle désignant par x un terme quelconque, et par n le rang de ce terme, on aura

$$x=n+1.$$

Maintenant, si de la solidité x^3 du rhomboïde auquel appartient la couche du rang n, on retranche la solidité $(x-1)^3$ du rhomboïde qui répond à la concavité de cette couche, on aura $3x^2-3x+1$, pour l'expression du nombre de rhomboïdes compris dans cette même couche; et si dans cette expression on met à la place de x sa valeur $n+1$, elle

devient

$$3n^2+3n+1.$$

80. Prenons maintenant la couche qui recouvre immédiatement le noyau pour la première : soit C le nombre d'arêtes de molécules contenues dans le côté de ce noyau, N le rang d'un terme quelconque, et soit toujours x le côté du rhomboïde auquel appartient la couche de ce rang. Si $x=C-1$, comme dans la première couche, on a $N=1$. Si $x=C-2$, on a $N=2$, etc. Donc, en général, $x=C-N$. Mais nous avons eu $x=n+1$; donc $n=C-N-1$. Si l'on substitue cette expression de n dans la formule $3n^2+3n+1$, on trouve $3(C-N)^2+3(N-C)+1$.

Supposons, par exemple, que l'on demande le nombre de rhomboïdes que contient la sixième des couches prises de bas en haut, dans un solide représentatif semblable à celui de la fig. 77. On aura $C=10$, $N=6$; ce qui donne, pour le nombre cherché, $3(4)^2+3(6-10)+1=37$. En doublant ce nombre, on aura 74 pour celui des rhomboïdes compris dans l'ensemble des deux couches qui se correspondent vers les deux sommets du noyau.

La même couche étant la troisième en partant du sommet, si l'on fait $n=3$, dans la formule $3n^2+3n+1$, on trouvera de même 37 pour le nombre de rhomboïdes que contient cette couche.

On peut présumer avec beaucoup de vraisemblance que la formule $3n^2+3n+1$, appliquée aux différens termes d'une suite dans laquelle x est égale successi-



vement à 2, 3, 4, 5, 6, etc., représente les solidités des couches de superposition, prises depuis le sommet, dans tous les dodécaèdres analogues à celui que nous considérons ici. Toute la différence consistera en ce que, dans ceux qui sont d'un plus gros volume, le nombre des termes de la progression sera plus considérable. Mais deux progressions quelconques auront toujours une partie commune.

81. Proposons-nous maintenant de déterminer le nombre de tous les petits rhomboïdes qui composent le dodécaèdre dont il s'agit, en supposant que l'on connaisse le nombre C d'arêtes comprises dans le côté du noyau.

La formule $3n^2+3n+1$, qui exprime le nombre de petits rhomboïdes compris dans une couche du rang n, fait voir que la somme de ceux que renferment toutes les couches superposées à un même sommet du noyau est égale à trois fois la somme des carrés des nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc., en comptant n pour le dernier; plus, à trois fois la somme des mêmes nombres; plus, au nombre désigné par n.

Or, d'après les formules démontrées à la page (77), on a

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2},$$

et
$$1+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+n^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{(2n+1)}{3}.$$

Donc la somme de tous les petits rhomboïdes compris dans les couches superposées à un même sommet du noyau sera, en général,

$$3\left\{\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{2n+1}{3}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}+n,$$

ou

$$3.\ \frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{2n+1}{3}+1\right\}+n=3\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+4}{3}\right)+n$$
$$=n(n+1)\,(n+2)+n\,;$$

mais à cause du décroissement par deux rangées $n=C-2$. Si l'on substitue cette valeur de n dans la formule, elle deviendra

$$C\,(C-1)\,(C-2)+C-2=(C-2)\,(C^2-C+1)$$
$$=C^3-3C^2+3C-2.$$

Or la somme S de tous les petits rhomboïdes dont le dodécaèdre est l'assemblage, est égale à C^3 plus au double de la quantité précédente ; donc

$$S=3C^3-6C^2+6C-4=3\,(C^3-2C^2+2C)-4.$$

Supposons $C=10$, comme dans la figure ; on aura

$$S=3000-600+60-4=2456.$$

82. La formule précédente se rapporte au cas où le sommet du dodécaèdre est supposé au point s' (fig. 81), que l'on peut considérer comme le sommet physique du dodécaèdre, dont le sommet géométrique est en s. Or, plus le nombre C augmente, plus le point s se rapproche du point s', et si l'on sup-

pose C infini, les deux sommets coïncideront en un même point; dans ce cas, les quantités $6C^2$, 6C et 4 s'évanouissent, et l'on a $S=3C^3$. Effectivement, on prouve par un calcul direct, ainsi que nous le verrons dans la suite, que si l'on considère la surface du dodécaèdre comme composée des plans tangens à tous les bords inférieurs des lames de superposition, ou, ce qui revient au même, si l'on considère le dodécaèdre comme un corps géométrique, sa solidité est triple de celle du noyau. A la rigueur, C n'est jamais infini dans la nature; mais il est si grand, à raison de l'extrême petitesse des molécules, que la distance entre *s* et *s'* peut être considérée comme nulle.

Je reviendrai dans la suite sur la même variété, dont je déterminerai les angles d'après les formules générales relatives au rhomboïde. Je ferai connaître en même temps plusieurs propriétés remarquables dont elle jouit.

83. Je vais citer un nouvel exemple que je tirerai encore de la chaux carbonatée, en continuant de prendre pour noyau le rhomboïde de $104^d\frac{1}{2}$, que je suppose ici représenté par ABGA'HD (fig. 82).

Concevons un décroissement par une simple rangée sur les bords supérieurs AB, AD, AF, etc. Il produira de part et d'autre de chacun de ces bords deux faces qui seront de niveau, comme celles qui se forment des deux côtés d'un même bord dans le dodécaèdre originaire du cube (fig. 70); en sorte que le

nombre des faces réellement distinctes du solide secondaire sera de six, c'est-à-dire qu'il sera égal à celui des bords qui servent de ligne de départ aux décroissemens, et il est facile de voir que les trois faces qui naissent, par exemple, autour du sommet supérieur, savoir, ALMO, ARSO, ALNR (fig. 82), étant situées en sens contraire de celles qui appartiennent au sommet inférieur, savoir, A'SRN, A'MLN, A'MSO, le solide secondaire sera un rhomboïde beaucoup plus obtus que le noyau, dans lequel les petites diagonales des rhombes coïncideront avec les bords supérieurs de ce noyau, et dont les angles solides seront situés au milieu de ses faces. Car les deux rhomboïdes ayant le même axe, si l'on conçoit un plan mené par les trois points L, O, R, il passera nécessairement par les trois diagonales horizontales supérieures des deux rhomboïdes, et par conséquent il passera par les angles solides B, D, F, du rhomboïde primitif, d'où il suit que ces points sont situés au milieu des diagonales menées de L en O, de O en R, et de R en F, c'est-à-dire qu'ils coïncident avec les milieux des faces du rhomboïde secondaire.

Les mêmes rhombes seront chargés de cannelures produites par les saillies et les rentrées alternatives des bords des lames décroissantes, et situées parallèlement aux petites diagonales, comme dans le dodécaèdre (fig. 70) qui nous a déjà servi de terme de comparaison. Les lames dont il s'agit subissent encore ici, dans les parties que le décroissement n'atteint

[illegible] l'effet de [illegible] pas inutile de [illegible] comme le noyau de [illegible] la structure. [illegible] artificielle- [illegible] cristallisation [illegible] appliquant sur les différentes [illegible] au noyau de la chaux [illegible] de lames décroissantes, com- [illegible] certain nombre de petits rhom- [illegible] à indiquer [illegible] à l'une des [illegible] que chaque lame [illegible] sur les cinq [illegible] qui répondent [illegible] [illegible].

[illegible] secondaire [illegible] exemple le [illegible] (fig. 52). [illegible] milieu [illegible] les [illegible] les [illegible] et les [illegible] on [illegible] DKN. [illegible] les [illegible] solide [illegible] ABCD,

CXOU, les trapèzes ABXO, ADUO, et les triangles BCX, DCU, sera le sixième de la matière qui enveloppe le noyau, ou ce qui revient au même, il sera l'assemblage des lames de superposition empilées sur la face ABCD du noyau. Il s'agit donc d'analyser ce solide pour arriver au résultat proposé.

Soit *ac* (fig. 84) ce même solide. Par les points *x*, *u*, menons le plan *xpu* parallèle au rhombe *abcd*. Toutes les lames de superposition situées entre l'un et l'autre auront des figures pentagonales telles que *efghie*, et toutes celles qui sont comprises entre *xpu* et le point *o* auront des figures triangulaires. De plus, le point *x* (fig. 84), ou X (fig. 83), étant situé à la moitié du côté OM, il est évident que le point *p* (fig. 84), divise en deux parties égales le côté *ao* qui est tangent à tous les angles supérieurs des lames de superposition. Il suit de là qu'il y a autant de ces lames situées entre le triangle *xpu* et le rhombe *abcd*, qu'entre le même triangle et le point *o*; d'où nous conclurons que le nombre total des lames de superposition doit être pair. Par une suite nécessaire le côté AB du noyau doit être composé d'un nombre impair d'arêtes de molécule, puisque ce nombre excède d'une unité celui des lames de superposition, à cause du décroissement par une rangée. Nous supposerons ici que ce nombre soit égal à 9.

85. Maintenant, pour concevoir comment les diverses lames pentagonales et triangulaires dont le solide *ac* est l'assemblage, sont uniquement compo-

sées de rhomboïdes, et comment elles subissent les variations auxiliaires dont j'ai parlé, imaginons qu'elles se projettent toutes sur un plan qui coïncide avec le rhombe *abcd*. L'ensemble de leurs projections sera représenté par la figure 85, dans laquelle le rhombe *abcd* est le même que figure 84. Le pentagone *efghi* (fig. 85) est la projection de la première lame de superposition qui est aussi indiquée (fig. 84). Les bords *ef*, *ei* (fig. 85) sont dans le sens du décroissement, qui seul suffit pour déterminer la forme secondaire. Les deux rangées situées le long des bords *fg*, *ih*, sont destinées à envelopper les parties correspondantes du noyau, pour éviter les angles rentrans. Chacune de ces rangées étant commune à la lame que représente la figure et à celle qui est appliquée sur la face primitive adjacente, on voit que dans le cas où l'on voudrait construire une imitation artificielle du rhomboïde secondaire, il ne serait pas nécessaire d'ajouter une semblable rangée à la seconde lame dont je viens de parler. La base *gh* du pentagone est composée d'angles alternativement rentrans et saillans. C'est ce que l'on concevra, en faisant attention que cette base étant parallèle à la diagonale *ux* (fig. 84), et les bords des lames décroissantes étant parallèles à l'autre diagonale *co* située sur le prolongement du bord A'C du noyau (fig. 82), la base dont il s'agit coupe perpendiculairement les cannelures produites par les saillies et rentrées alternatives des bords décroissans; d'où il résulte qu'elle doit former une ligne

anguleuse assortie à l'effet du décroissement sur la surface dont elle fait partie.

Dans les trois projections suivantes *lmnσk*, *rstzν*, *yxuγδ*, il y a de même addition de deux rangées vers les bords *lm*, *σn*, *rs*, *zt*, *yx*, *γu*, pour remplir le vide que laisseraient entre elles les parties correspondantes, si cette addition n'avait pas lieu. Mais le nombre des rhomboïdes ajoutés décroît d'une lame à l'autre, en sorte que sur la dernière il n'y en a plus qu'un seul, indiqué par *yx* ou *γu*. Au-delà de ce terme, qui répond au plan *xpu* (fig. 84), les projections cessent de s'accroître par leurs bords latéraux, en sorte qu'elles se réduisent aux assortimens compris dans les espaces *εstλp* (fig. 85), *ζmnπμ*, *θghφν*, et la dernière se réduit à un rhombe *cω*, qui indique le rhomboïde situé à l'angle *o* (fig. 84). Dans la réalité, ces espaces sont des pentagones dont les côtés latéraux sont égaux chacun à une arête *εs*, *ζm*, *θg*, de molécule. Mais à cause de l'extrême ténuité des molécules, ces côtés sont censés infiniment petits, en sorte que les pentagones se présentent sous l'aspect de triangles isocèles.

86. Dans le cas présent, les nombres de rhomboïdes qui composent les couches successives composées chacune de six lames de superposition, forment deux séries dont chacune suit une loi particulière. La première répond aux couches situées entre le triangle *xpu* (fig. 84) et le rhombe *abcd*, et la seconde aux couches comprises depuis le même triangle jusqu'au

[illegible] étant égaux dans les [illegible] de molécule com- [illegible] du noyau étant égal à la [illegible] à l'unité, il suffira de [illegible] nombre pour savoir à quelle [illegible] couche d'un rang donné, et [illegible] rhomboïdes dont elle est com- [illegible] formule relative à la [illegible]

[illegible] les termes, $N+1$ sera celui [illegible] comprises dans chaque côté [illegible] ligne *bz* (fig. 84) étant la somme [illegible] etc. (fig. 85), et la ligne *ao* [illegible] étant la somme des points *a*, [illegible] Il est évident que chacun des [illegible] etc., des lames de superpo- [illegible] à la première série, est égal au [illegible] du noyau. Donc on peut considérer [illegible] *efghi*, *klmno* (fig. 85), comme [illegible] du noyau, dont on aurait re- [illegible] dans la partie inférieure. Soit *s* en [illegible] faces de molécule comprises dans [illegible] dont se compose l'un quel- [illegible] on aura $x=(N+1)^2-s$. [illegible] relative à chaque pentagone, tel [illegible] à la différence entre le nombre [illegible] comprises dans le rhombe [illegible] triangle *mrn* (fig. 85 et 86) [illegible] nombre de facettes comprises dans

ce même triangle. Soit C le nombre d'arêtes de molécule contenues dans le côté soit du rhombe, soit du triangle. s sera égal au triangle inférieur $m\psi n$, plus à la somme des petits triangles $m\vartheta g$, $g\tau e$, etc., situés au-dessus de la diagonale mn. Or, l'expression du triangle inférieur est $\frac{C^2}{2}$; et parce que le nombre de diagonales de molécule comprises dans la diagonale mn est égal à celui d'arêtes de molécule contenues dans le côté $m\nu$, la somme des petits triangles $m\vartheta g$, $g\tau c$, etc., sera $\frac{C}{2}$. On peut appliquer le même raisonnement à tout autre pentagone. Donc, en général,

$$s = \tfrac{1}{2}(C^2 + C). \text{ Donc, } x = (N+1)^2 - \tfrac{1}{2}(C^2 + C).$$

Maintenant soit n' le rang d'un terme quelconque, dans la série prise en partant du noyau, la quantité G est successivement $g\omega$, $m\nu$, $s\mu$, etc., c'est-à-dire 2, 4, 6, etc., ou en général $2n'$. Donc, substituant $2n'$ à la place de C, on aura $x = (N+1)^2 - 2n'^2 - n'$.

Or, chaque couche étant composée de six lames, on aurait son expression en multipliant la précédente par 6, si chaque lame n'avait pas de rangée commune avec les lames adjacentes. Il faudra donc déduire de l'expression précédente multipliée par 6 la moitié de la somme des petits rhomboïdes contenus dans les rangées communes. Mais ces rangées ont successivement pour côtés les lignes fg, lm, rs, etc., dont la première renferme deux arêtes de molécule de moins

[illegible] la deuxième deux de moins que la première, et ainsi de suite. Donc, puisque

$$3c = N+1,$$

[illegible] dont il s'agit, ou, ce qui revient au même, [illegible] les petits rhomboïdes contenus dans les différentes rangées, sera $N-1$, $N-3$, $N-5$, etc., et en général $N-(2n'-1)=N-2n'+1$. Or, chaque pentagone a deux rangées communes avec les [illegible] adjacens ; donc, retranchant de la première expression $6(N-2n'+1)$, on aura pour celle d'un terme quelconque pris dans la première série,

$$[illegible] -6(N-2n'+1),$$

ou plus simplement $3(N^2+N-2n'^2+n')$.

[illegible] Si nous prenons les termes de la seconde série en partant du point [illegible] (fig. 84), il est facile de voir [illegible] égaux successivement aux nombres de [illegible] contenus dans les triangles $g\omega h$, [illegible]. Mais d'après ce qui a été dit [illegible] un quelconque de ces nombres a pour expression [illegible] $=\frac{1}{2}C^2-C$. Soit n le rang d'un terme quelconque, en partant toujours du point [illegible], C étant égal successivement à [illegible], on aura en général $C=2n$. [illegible] ce terme sera $2n^2-n$.

Maintenant, N étant toujours le nombre total des [illegible], si nous convenons de désigner par n le rang d'un terme quel-

conque, en partant des faces du noyau, nous aurons en général $n = N - n' + 1$, et l'expression $2n^2 - n$ deviendra $2(N - n' + 1)^2 - N + n' - 1$, qui se réduit à $2(N - n')^2 + 3(N - n') + 1$. Donc chaque terme de la deuxième série sera représenté par

$$6[2(N - n')^2 + 3(N - n') + 1].$$

88. Supposons que l'on demande le nombre x de rhomboïdes contenus dans la troisième couche, le côté du noyau étant égal à 9, comme dans la fig. 85; en prenant la formule relative à la première série, on aura

$$x = 6(N^2 + N - 2n'^2 + n') = 6(64 + 8 - 18 + 3) = 342.$$

Si x appartient à la deuxième série, et que le terme que l'on cherche soit, par exemple, le sixième, on aura, en employant la formule relative à cette série,

$$x = 6[2(N - n')^2 + 3(N - n') + 1] = 6[2(8 - 6)^2 + 3(8 - 6) + 1] = 90.$$

89. Je terminerai cet article par la solution d'un problème analogue à celui dont nous nous sommes occupés à l'occasion du dodécaèdre métastatique, et qui aura pour but de déterminer généralement le nombre de rhomboïdes élémentaires contenus dans un rhomboïde produit par la loi de décroissement que nous venons de considérer, en prenant pour donnée le nombre d'arêtes de rhomboïdes élémentaires compris dans le côté du noyau.

Nous prendrons ici la série des lames de superpo-

[illegible] partant des angles saillans M, S, etc. (fig. 82), perpendiculaire, c'est-à-dire dans le sens où elle est augmentée, et nous la supposerons comme ci-dessus partagée en deux séries d'un égal nombre de termes.

Cherchons d'abord le nombre de petits rhomboïdes que renferme la série comprise entre le point o (fig. 84) et le point p, en nous bornant à ce qui a lieu par rapport à une seule face du noyau. Nous avons vu ci-dessus que l'expression d'un terme quelconque de cette série étoit $2n^2 - n$. Donc la somme de tous les termes est égale à deux fois la somme des carrés des nombres naturels, en prenant autant de ces nombres que la série contient de termes, moins la somme des nombres simples. Or, si l'on représente par n le nombre des termes, on a, d'après les formules de la page [illegible],

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6},$$

et

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Par conséquent la somme des termes de la première série sera

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{3} - \frac{n^2 + n}{2} = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6}.$$

Mais, $n = \frac{C - 1}{2}$; substituant à la place de n cette valeur, nous aurons $\frac{2C^3 - 3C^2 - 2C + 3}{24}$. Donc la tota-

lité des six séries relatives aux six faces du noyau aura pour expression $\frac{2C^3 - 3C^2 - 2C + 3}{4}$.

90. Passons à la série suivante, et supposons d'abord que chaque lame de superposition n'ait pas de rangée commune avec les lames adjacentes. Dans cette hypothèse, l'expression d'un terme quelconque du rang n', en partant du noyau, est $(N+1)^2 - 2n'^2 - n'$ (page 105). Soit n'' le rang du terme qui répond à n', en allant au contraire vers le noyau; nous aurons

$$n' = \tfrac{1}{2}N - n'' + 1.$$

Donc

$$n'^2 = \tfrac{1}{4}N^2 - Nn'' + N + n''^2 - 2n'' + 1.$$

Si l'on substitue cette valeur et celle de n' dans l'expression d'un terme quelconque, et qu'en même temps on réduise, on trouvera, en donnant un même dénominateur à tous les termes,

$$\frac{N^2 - N + 4Nn'' - 4n''^2 + 10n'' - 4}{2} = (2N+5)n'' - 2n''^2 + \frac{N^2 - N - 4}{2}.$$

Donc la somme des petits rhomboïdes compris dans la série dont il s'agit ici, est composée du produit de $(2N+5)$ par la somme des nombres naturels, en prenant autant de ces nombres que la série renferme de termes, moins deux fois la somme des carrés des mêmes nombres, plus la quantité $\frac{N^2 - N - 4}{2}$ prise autant de fois qu'il y a de termes dans la série, c'est-



[illegible] termes. Mais

[illegible] valeurs, nous [illegible] polynômes,

$$= \frac{[illegible]}{24};$$

[illegible] six termes relatives aux six faces [illegible]. Mais à cause des [illegible] adjacentes, il faut re- [illegible]

[illegible] termes, [illegible]

Retranchant cette quantité de

$$\frac{10C^3-15C^2+2C+3}{4},$$

on aura pour le nombre de rhomboïdes élémentaires compris dans la seconde série,

$$\frac{10C^3-21C^2+14C-3}{4};$$

ajoutant l'expression de la première série, ou

$$\frac{2C^3-3C^2-2+C3}{4},$$

plus la valeur C^3 du noyau, on trouve que le nombre de tous les petits rhomboïdes que renferme le rhomboïde secondaire est $4C^3-6C^2+3C$.

91. Supposons $C=9$, comme dans la figure, le nombre des rhomboïdes élémentaires sera égal à 2457.

Si l'on fait C infini, auquel cas C^2 et C s'évanouissent devant C^3, la solidité du rhomboïde secondaire sera quadruple de celle du noyau, ce que démontre également le calcul, lorsque l'on considère le rhomboïde secondaire comme corps géométrique.

Décroissemens sur les angles et décroissemens intermédiaires.

92. Nous allons maintenant nous occuper des décroissemens sur les angles; mais après avoir donné quelques notions générales relatives à la marche de ces décroissemens, je réunirai avec eux, sous un

à-dire … *intermé-*
… existe entre
(2N-
… solide pri-
n dés … droit sy-
… de petits
… d'autant de
Subs … une suite de lames
auro … croissent vers leurs
… d'une simple
(2C- … nous servir du
… effets du décroisse-
… dont il s'agit, en sup-
… projetées sur ce même
don … à considérer ce qui
du … tel que D, attendu
ran … même cas que celui-ci,
tran … première lame de superpo-
et m … présente la figure, sera
nous … désignée par la lettre *a*;
… moins que la première
… par *b*, *k*; que la troisième
c'est-… les trois molécules dé-
fois la … suite.
tant d… primitif déjà repré-
moins … *bd'*, les deux molé-
… sentent les bases: *n*
… bases sont désignées
… suite pour les molé-

(
12

cules dont o, p, m, d, représentent les bases. Il est visible que la nouvelle facette latérale que le décroissement fera naître sur la première lame de superposition, par la soustraction de la molécule a, ne sera réellement composée que des deux arêtes $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ (fig. 88); que la facette qui correspondra à la précédente sur la seconde lame, sera l'assemblage des trois arêtes $\varepsilon\varepsilon'$, ee', $\zeta\zeta'$, et ainsi de suite.

93. De plus, il est facile de concevoir que la face produite par le décroissement ne sera plus simplement sillonnée par des espèces de cannelures, comme dans les décroissemens sur les bords; mais elle sera hérissée de pointes γ, δ, ε, e, ζ, etc., qui, étant toutes de niveau, et échappant à l'œil par leur petitesse, s'offriront sous l'aspect d'une surface continue.

Une nouvelle différence qui existe entre les décroissemens sur les angles et ceux que subissent les bords, consiste en ce que ceux-ci, en supposant qu'ils agissent sur les quatre bords des lames de superposition, emportent ces bords tout entiers, au lieu que les décroissemens sur les angles, en même temps qu'ils font naître de nouveaux bords tournés vers ces mêmes angles, laissent subsister, au moins jusqu'à un certain terme, des portions des bords primitifs.

94. Il suit de là que les grandes faces des lames de superposition dont la figure 87 représente les projections, sont d'abord des octogones $\gamma\delta rq\sigma y'l'm'$, $\varepsilon\zeta\vartheta\lambda k'f's'e'$, etc., dans lesquels les nouveaux bords $\gamma\delta$,

même point de v
diaires, à cause d
les uns et les aut

Soit ABCD (fi
mitif que nous s
métrique, sous
carrés, qui so
molécules sou
empilées sur
quatre angl
rangée de m
carré ABC
ment sur l
posant q
carré. Or
se passe
que les f
il est fa
sition
dimin
que la
les de
aura
signé

S
sen
cul
(fi
pa

que les rési-
nt au contraire
représente la
molécule dont se
AD, est impair,
par n'être plus
que $\pi\xi$; et cette
té infiniment pe-
etc., les grandes
qui s'appliquent les
terme, sont censées
eur elles soient des
vont en diminuant
sorte que la surface
représentée par l'octo-
respond à cinq molé-
dernière lame est un
cette même lame se

droit symétrique
primitive, et qui subisse
bases un décroissement
celui dont nous venons
produites par le décrois-
que la somme des angles
$\varepsilon\zeta$, $\mu\nu$, etc., sont
que les faces dont il
que des largeurs infi-
ment en s'élargissant

au terme qui répond à la ligne $\lambda\xi$, et aux au- semblablement situées, et que, passé ce terme, se rétréciront progressivement jusqu'à ce qu'elles ient réduites à de simples points; et parce que les bords *fg*, *vu*, situés au-delà de $\lambda\xi$, diminuent dans le rapport inverse de celui qui détermine l'accroissement des bords $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$, $\mu\nu$, etc., situés en-deçà de la même ligne, les faces produites par le décroissement seront nécessairement des rhombes.

Le résultat précédent conduit à un dodécaèdre représenté (fig. 90), dont la surface est composée de quatre hexagones verticaux DPCGRF, BHCGUL, etc., qui répondent aux faces latérales de la forme primitive, et de huit rhombes SPCH, SPDM, etc., disposés quatre à quatre autour dès sommets. Ces rhombes sont produits immédiatement par le décroissement, ainsi que je l'ai expliqué plus haut, et les triangles DPC, CHB, etc., qui terminent les hexagones, sont les sommes des portions des bords primitifs que le décroissement n'atteint pas. Si l'on fait passer un plan MPHK par les diagonales horizontales des rhombes situés vers l'un quelconque des sommets, ce plan répondra à l'octogone $\lambda\xi\pi\upsilon\tau\eta\psi\omega$ (fig. 87), qui, comme je l'ai dit, est censé être un carré. Tous les autres plans menés entre PH et le point C, parallèlement à MPHK, répondront successivement aux octogones situés entre $\lambda\xi$ (fig. 87) et le point D, et tous les plans menés entre PH (fig. 86) et le sommet S, répondront aux octogones situés entre $\lambda\xi$ (fig. 87) et

8..

[illegible] peuvent être considérés comme [illegible]

[illegible] maintenant passer à la manière de con-[illegible] mensurateurs relatifs aux décrois-[illegible] sur les angles, et ce que je dirai sur ce sujet [illegible] aux décroissemens intermé-[illegible] comme je l'ai déjà dit, sont étroitement [illegible] ceux qui ont lieu parallèlement aux dia-[illegible]

[illegible] un parallélépipède quelconque [illegible] de forme primitive, et dont les [illegible] sur leurs quatre angles un décrois-[illegible] supposerons d'abord avoir lieu [illegible] rangée, et dont nous nous bornerons [illegible] par rapport à l'angle D. Soit Dγ' [illegible] molécule intégrante; ayant pris sur DA [illegible] la partie Dm égale à la dimension en lar-[illegible] la molécule (fig. 91), et ayant pris sur DC [illegible] la partie Dr égale à la dimension en lar-[illegible] menons mn et rs (fig. 89), paral-[illegible] égales à la dimension en hauteur ϑD [illegible]. Les points D, n, s (fig. 89), étant les som-[illegible] angles solides désignés par les lettres D, γ, δ [illegible] le plan nDs (fig. 89) qui passe par ces trois points, sera le rudiment de la face produite par le décroissement. Menons de plus le plan $nsrm$, qui coïncidera avec la nouvelle facette latérale que le décroissement a fait naître sur la première lame de superposition. La ligne Do, perpendiculaire sur mr

sera la base du triangle mensurateur; la ligne *oh* menée du point *o* sur le plan *nsrm*, perpendiculairement à *mr*, sera le côté intérieur du même triangle, et la ligne D*h* en sera le côté extérieur, d'où il suit que l'angle *h*D*o* donnera l'inclinaison de *n*D*s* sur la base ABCD de la forme primitive.

97. Si l'on suppose que le décroissement ait lieu successivement par deux, trois, quatre rangées en largeur, la base du triangle mensurateur, en conservant toujours la même direction, sera double, triple ou quadruple de D*o*, et si le décroissement est en même temps mixte, le côté intérieur du triangle mensurateur, en restant sur la direction *oh*, sera égal à autant de fois cette même ligne qu'il y aura de rangées soustraites en hauteur; c'est-à-dire que si l'on fait $Do = l$, $oh = h$, et si l'on désigne par n le nombre de rangées soustraites en largeur, et par n' celui de rangées soustraites en hauteur, la base du triangle mensurateur sera en général $n \times l$, et son côté intérieur sera $n' \times h$.

Si la base de la molécule est un carré ou un rhombe, la ligne D*o*, dans le cas d'un décroissement par une rangée, sera égale à la moitié de la diagonale qui va de D en ε ou de ϑ en ε' (fig. 91), et en général le nombre de diagonales qu'elle mesurera sera la moitié du nombre de rangées soustraites dans le sens de la largeur.

98. On voit ici une nouvelle différence entre les décroissemens sur les angles et ceux qui ont lieu sur

le ce[illegible] nen-
des [illegible] per-
96 [illegible] la base de
strui[illegible] lar-
sem[illegible] que le
s'ét[illegible] base du
dia[illegible] horizon-
liés [illegible] lerrisse-
gor[illegible] à la
[illegible] mensurateur
fai[illegible] prise
bas[illegible]
ser[illegible] intermé-
pa[illegible] qui fait la
à [illegible] sur un as-
(fi[illegible] simples,
(fi[illegible] considérera ces
ge[illegible] série, et la
(fig[illegible] perpendicu-
ge[illegible] quadrilatère
lèl[illegible] mensura-
(fig[illegible] menée du
me[illegible] (fig. 89).
(fig[illegible] primitive est
poi[illegible] BC = 4, et CG
dé[illegible] l'apophyllite.
coï[illegible] par une
dé[illegible] chaque base,
sup[illegible] on aura,

au lieu d'un dodécaèdre analogue à SY (fig. 90), le solide représenté figure 93, dont les faces obliques sont des pentagones surmontés de deux facettes carrées *pnir*, *utsx*, parallèles aux bases de la forme primitive.

Menons les diagonales AC, BD (fig. 89). Soit *cab* (fig. 94) le triangle mensurateur, dans lequel l'angle *b* sera droit, et *ab* sera à *bc* :: DS (fig. 89) : DF :: $\sqrt{8}$: 5, ce qui donne $29^d 30'$ pour l'angle *acb*, et par conséquent $60^d 30'$ pour l'angle *cab*. Donc l'incidence de chacun des pentagones C*hnpk*, D*hnie*, etc. (fig. 93), sur la face terminale, sera de $119^d 30'$, et celle du même pentagone sur l'arête verticale adjacente CG ou DF, sera de $150^d 30'$. Je donnerai, dans la partie analytique, les formules à l'aide desquelles on peut aussi déterminer les incidences mutuelles des pentagones adjacens.

Je donne le nom d'*apophyllite épointé* à la variété que je viens de décrire, et que j'avais d'abord placée, avec la même épithète, dans l'espèce de la mésotype. Il me fallait des cristaux d'une forme beaucoup plus nettement prononcée que ceux qui avaient servi à mes premières observations, pour rétablir l'exactitude dans la détermination des formes relatives à ces deux substances. Ceux qui m'ont offert cet avantage venaient les uns d'Utön en Suède, et les autres de Féroë.

Je suis redevable des premiers à M. Suedenstierna, directeur des mines, que je me félicite de compter

[illegible] leçons publiques
[illegible] distingués par la
[illegible] rapidité de leurs
[illegible] M. Petersen,
[illegible] d'orner ma
[illegible] intérêt pour
[illegible] lui-même dans
[illegible] ses

[illegible] considérer,
[illegible] est censée
[illegible] latérales
[illegible] supposer aussi que les
[illegible] la formation d'un
[illegible] accroissemens simul-
[illegible] mesures de ces [illegible]
[illegible] l'angle solide dont
[illegible] seulement lieu,
[illegible]
[illegible] Je vais dé-
[illegible] dépend ce
[illegible] la fig. 80,
[illegible]
[illegible]
[illegible] moyau,
[illegible] dimensions en
[illegible]
[illegible] mutuellement de
[illegible] sur

l'arête DF la partie Dμ égale à mn ou à rs, menons $m\mu$ et $r\mu$. Les lignes mn, Dμ et rs étant égales et parallèles entre elles, il est évident que les deux plans nDs, $m\mu r$, sont aussi parallèles l'un à l'autre.

102. Supposons que le décroissement ayant lieu sur l'angle latéral ADF, Dm et Dμ représentent les nombres de dimensions en largeur soustraites sur les côtés DA, DF, et que Dr représente le nombre de dimensions en hauteur qui répond à celui des rangées soustraites dans le même sens. Des points m, μ, j'élève les lignes mt, μu, parallèles et égales à Dr, puis ayant mené tn, je fais passer un plan par les points tDu. D'après ce qui a été dit plus haut, ce plan est le rudiment de la face produite par le décroissement, et en appliquant ici le raisonnement que nous avons fait par rapport au plan nDs, on en conclura que les plans tDu, $mr\mu$, sont parallèles entre eux, comme les plans nDs, $m\mu r$. Donc les plans tDu, nDs, étant parallèles à un troisième plan $m\mu r$, et ayant un point commun D, se confondent sur un seul plan.

Supposons enfin que le décroissement ayant lieu sur l'autre angle latéral CDF, Dr et Dμ représentent les nombres de dimensions en largeur soustraites sur les côtés DC, DF, et que Dm représente le nombre de dimensions en hauteur qui détermine le nombre de rangées soustraites dans le même sens. On prouvera, à l'aide d'une construction semblable aux deux précédentes, que le plan πDZ, qui est le rudiment de

[illegible] ssement, se confond sur [illegible] premiers plans tDu, nDs. [illegible] semens qui agissent sur [illegible] réunissent pour former [illegible] de telles mesures, que [illegible] représentent les nombres [illegible] soustraites sur les côtés, et [illegible] en hauteur soustraites dans [illegible] mêmes pour tous les angles, [illegible] changement que dans les [illegible] les faces produites par les [illegible] coïncideront sur un même plan. [illegible] quelconque des trois décrois- [illegible] il est facile de déterminer les [illegible] peut conclure encore de ce qui pré- [illegible] décroissemens a lieu par une [illegible] deux autres se feront aussi par [illegible] un seul des décroissemens a lieu [illegible], même en supposant qu'il soit [illegible] les lames de superposition sont [illegible] diagonale, et n'ont que l'épaisseur [illegible] deux autres décroissemens seront [illegible] intermédiaires. Car en supposant que [illegible] celui qui subit le décroissement, on [illegible] chacune à deux dimensions en [illegible], tandis que $D\mu$ sera égale à une [illegible] en hauteur. Maintenant, si l'on [illegible] croissement qui a lieu par rapport à [illegible] les lignes Dm et $D\mu$ représenteront les

nombres de dimensions en largeur sur les cotés DA, DF, et ces nombres étant inégaux, la ligne Dμ ne pourra être parallèle à la diagonale menée de A en F, et par conséquent le décroissement sera intermédiaire.

Ce qui se présente de plus naturel, dans ces sortes de cas, est de rapporter le résultat des trois décroissemens à celui qui est simple, et qui a lieu parallèlement à la diagonale, en supposant que les deux décroissemens intermédiaires n'interviennent que comme *auxiliaires*, pour prolonger l'effet du décroissement principal au-dessus des faces adjacentes à celles qui le subit. Je reviendrai bientôt sur ce sujet, dont le développement me fournira un nouvel exemple de la méthode synthétique, dont j'ai déjà fait usage pour décrire l'ordre de la structure dans les formes secondaires.

104. Passons à de nouvelles applications, et supposons d'abord que la forme primitive étant un cube AO′ (fig. 95), subisse des décroissemens par une simple rangée sur tous les angles de ses différentes faces. Nous nous bornerons, pour le présent, à considérer ce qui se passe par rapport aux trois angles plans réunis autour de l'angle solide O. Ayant pris sur les bords OE, OI, OO′, les parties O*c*, O*d*, O*r*, égales chacune à une arête de molécule cubique, menons les lignes *ct*, *dk*, parallèles à OO′, les lignes *cg*, *rs*, parallèles à OI, puis les lignes *dh*, *rz*, parallèles à OE, en donnant de même à chacune de ces lignes



une longueur égale à une arête de molécule. Si par le point O et par les extrémités des mêmes lignes prises deux à deux, nous faisons passer les plans *tok*, *gos*, *hoz*, il est facile de concevoir, d'après ce qui a été dit plus haut (pag. 122), que ces plans seront les rudimens des faces produites par les trois décroissemens qui agissent autour du point O, et qu'en même temps ils seront de niveau sur un plan unique. De plus, ces plans étant des triangles isocèles, égaux et semblables, et les angles *gct*, *kdh*, *srz*, compris entre eux, étant aussi égaux, il en résulte que si l'on prolonge leurs bases *gs*, *hz*, *tk*, elles se rencontreront de manière à former avec leurs prolongemens le contour d'un triangle équilatéral *uxy*. Enfin, les plans *g*O*s*, *t*O*k*, *h*O*z*, étant également inclinés sur les trois faces EOO'E', EOIA, IOO'I', au-dessus desquelles ils s'élèvent, il est visible que le triangle équilatéral *uxy* est perpendiculaire sur l'axe du cube qui passe par les points O, A'. Le même raisonnement s'applique aux résultats des décroissemens qui agissent autour des sept autres angles solides. Donc les faces du cristal secondaire n'étant autre chose que les triangles analogues à *uxy*, prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, et celles qui sont opposées deux à deux étant perpendiculaires sur l'axe du cube qui passe par les deux angles autour desquels elles se sont formées, la surface qui résultera de leur ensemble sera celle d'un octaèdre régulier *s*, *s'* (fig. 96). Le cube sera inscrit dans cet octaèdre, de manière

que ses angles solides coïncideront avec les milieux des faces du même octaèdre, et l'on voit, par la seule inspection de la figure, que ce dernier solide a ses faces tournées en sens contraire des triangles tels que *uxy*, qui en offrent les rudimens. Soit *omn* (fig. 97), le triangle mensurateur relatif à l'un quelconque des décroissemens, par exemple à celui qui a lieu sur l'angle EOI (fig. 95). La base *om* (fig. 97) sera égale à une demi-diagonale de molécule, et le côté intérieur *mn* à une arête, d'où il suit que l'on aura

$$om : mn :: 1 : \sqrt{2}.$$

Or, il est facile de voir que ce rapport est le même que celui qui existe entre la perpendiculaire menée du centre de la base de la pyramide *mnm'n's* (fig. 96) sur le côté *mn*, et la hauteur de la même pyramide. Donc si l'on représente ces deux lignes par 1 et $\sqrt{2}$, on aura $\sqrt{3}$ pour l'apothème du triangle *msn*, et parce que la perpendiculaire menée du centre de la base sur *mn* est égale à la moitié de ce même côté, l'expression de ce dernier sera 2. De plus, l'apothème du triangle *msn* étant $\sqrt{3}$, et la moitié du côté *mn* étant l'unité, on aura

$$ms, \text{ ou } ns = \sqrt{3+1} = 2,$$

d'où il suit que le triangle *msn* est équilatéral, et que le solide secondaire est un octaèdre régulier, comme on l'a déjà vu. D'après les données dont j'ai parlé,

[illegible] qui mesure la [illegible] de l'octaèdre [illegible] ce qui donne [illegible] 109° 28′ 16″.

[illegible] nous venons de con- [illegible] pour déterminer tout d'un [illegible] décrois- [illegible] verses [illegible] vais [illegible] dévé- [illegible] superposition, en indi- [illegible] subissent pour seconder [illegible] auquel tout se rapporte.

[illegible] la même face [illegible] noyau [illegible] étant [illegible]

Fe, Aa, Oo, Ii, restent à vide, ce qui est l'effet initial de la loi de décroissement. On voit de plus, que la lame de superposition dont il s'agit est augmentée d'une rangée au-delà des portions des bords ST, RU, XZ, YM, qui répondent aux bords EA, EO, OI, IA (fig. 98 A), ce qui est nécessaire pour que le noyau s'accroisse à l'ordinaire dans les parties que le décroissement n'atteint pas. Chacune des rangées additionnelles PN, QV, GF, CL, étant commune aux deux lames qui s'appliquent l'une sur AEOI (fig. 95), et l'autre sur une des faces adjacentes, on se dispenserait de le répéter, si l'on voulait exécuter une imitation du solide dont il s'agit ici.

Ces mêmes rangées additionnelles font naître de nouveaux vides à côté de celui qui est l'effet immédiat du décroissement ; ainsi, dans le cas où ces rangées n'existeraient pas, il n'y aurait vers l'angle O (fig. 98 A) qu'un seul vide Uo'X (fig. B), produit par la soustraction de la molécule qui répond à Oo (fig. A); mais l'addition des deux rangées PN, CL (fig. B), détermine entre les carrés *b*, *d*, d'une part, et *r*, *s*, de l'autre, deux nouveaux vides qui étendent l'effet du décroissement vers les parties adjacentes au point O (fig. A). Or, ces nouveaux vides sont censés résulter de la soustraction de deux cubes situés sur les prolongemens des rangées additionnelles PN, CL (fig. B), en sorte que chacun de ces vides est limité inférieurement par une facette de molécule, comme l'est le vide Uo'X par la face Oo (fig. A).

La figure 99 fera concevoir cette disposition. Soit O*o* la molécule cubique située au point O (fig. 95 et 98 A), et soient *b*, *d*, *r*, *s* (fig. 99), les quatre molécules désignées par les mêmes lettres (fig. B). Soient de plus *b*, *l*, *t*, *u* (fig. 99), les molécules qui répondent aux précédentes dans la première lame de superposition appliquée sur la face EOO′E′ (fig. 95), et soient *s*, *y*, *x*, *u* (fig. 99), celles qui leur répondent dans la lame appliquée sur la face OII′O′ (fig. 95). Les vides qui existent l'un entre les molécules *d*, *r* (fig. 99), un autre entre les molécules *l*, *t*, et un troisième entre les molécules *y*, *x*, et qui sont l'effet immédiat du décroissement, résultent de la soustraction de trois cubes qui reposeraient sur les facettes O*o*, Oγ, Oδ; or, tous les vides qui sont dus aux rangées additionnelles, se trouvent dans le même cas que les précédens par la manière dont ils sont limités : ainsi le vide qui existe entre les cubes *b* et *d*, est censé produit par la soustraction d'un cube qui reposerait sur la facette $\epsilon\nu$ de la molécule *l*. Il en est de même des autres vides, et tel est le mécanisme de la structure, considéré dans son ensemble, que les modifications accessoires au décroissement s'assimilent à celles qui en dérivent nécessairement.

La face supérieure de la seconde lame de décroissement est représentée par BKHD (fig. C), et sa position au-dessus de la précédente est indiquée par la correspondance des lettres *e*″, *a*″, *i*″, *o*″, et des lettres [illegible] (fig. B).

Cette lame dépasse la précédente, dans les parties que le décroissement n'atteint pas, d'une quantité qui serait égale à une rangée de cubes, si le noyau était composé d'un plus grand nombre de molécules, mais qui, dans le cas présent, se réduit à un simple cube désigné par B, K, H ou D.

Les grandes faces des lames de superposition qui jusqu'alors étaient des octogones tels que PQVGFCLN (fig. B), étant parvenues à la figure du carré BKHD (fig. C), décroissent, passé ce terme, dans toutes leurs dimensions, en sorte que leurs grandes faces sont successivement représentées par les figures D, E, F, G, H, I, où leurs positions respectives les unes au-dessus des autres se trouvent indiquées par la similitude des lettres *c*, *f*, *g*, *h* (fig. C), c', f', g', h' (fig. D), c'', f'', g'', h'' (fig. E), et ainsi des autres. On voit que la dernière lame se réduit à un simple cube désigné par z' (fig. I), et qui repose sur celui qu'indique *z* (fig. H).

La figure 100 représente une des faces de l'octaèdre produit par le décroissement, avec l'assortiment des molécules dont les angles extérieurs concourent à sa formation.

106. La série des lames empilées sur l'une quelconque des faces du cube (fig. 95), par exemple sur la face AEOI, diffère de celle des lames qui, dans le dodécaèdre représenté (fig. 90), correspondent à chacune des bases du noyau (fig. 89), en ce que ces dernières lames n'éprouvent d'autre variation que

celle qui dépend du décroissement, de manière que les portions de leurs bords que ce décroissement n'atteint pas, restent sur les plans des faces latérales CDFG, BCGL, etc., au lieu que les portions de bords correspondantes dans les lames composantes de l'octaèdre originaire du cube s'étendent, en se recouvrant mutuellement, pour empêcher qu'il ne se forme des angles rentrans aux mêmes endroits. Il en résulte que la face produite par chacun des décroissemens qui ont lieu sur les angles de la base AEOI (fig. 95) n'est plus un rhombe, comme dans le cas du dodécaèdre (fig. 90), mais un trapézoïde, tel que *orst* (fig. 96). Car, à cause des rangées additionnelles dont on a parlé, les bords qui répondent à PQ, GV, CF, LN (fig. 98 B), augmentent dans un plus grand rapport que si ces rangées n'existaient pas, et de plus l'existence de ces mêmes rangées accélère le terme où les lames de superposition commencent à décroître de tous les côtés à la fois; d'où il suit que le triangle *rot* (fig. 96), qui est la somme des bords croissans dont on a parlé, a moins de hauteur, sur une base égale, que le triangle *rst*, qui est la somme des bords pris depuis le terme où le décroissement a lieu dans tous les sens. Mais ces augmentations et ces diminutions successives sont tellement combinées, que les trois trapézoïdes *orst*, *ormz*, *otnz*, produits par les trois décroissemens qui agissent autour d'un même angle solide O, composent par leur assortiment un triangle équilatéral *msn*, et le même effet se répé-

tant à l'égard des sept autres angles solides, les vingt-quatre trapézoïdes qui naissent de l'ensemble des décroissemens donnent huit triangles équilatéraux, qui sont les faces du solide secondaire.

107. Les nombres de cubes renfermés dans les couches que forment les lames de superposition, en s'appliquant six à six les unes au-dessus des autres, donnent deux séries récurrentes, dont la première, en partant du noyau, contient toutes les lames qui ont vers leurs bords des rangées additionnelles, et la seconde toutes celles qui décroissent dans tous les sens à la fois.

Cherchons d'abord la valeur d'un terme quelconque dans la première série. Soit n le rang de ce terme, et c le nombre d'arêtes de molécules contenu dans le côté du noyau. Chaque lame recevant une rangée additionnelle vers chacun de ses bords opposés, il est évident que le côté de la première lame, en la complétant par la pensée, sera $c+2$, celui de la 2^e $c+4$, celui de la 3^e $c+6$, et en général $c+2n$. Or, il est aisé de voir que la première lame (fig. B) se trouve dans le même cas que si, ayant d'abord été complète, elle avait subi vers chacun de ses angles un décroissement par trois rangées, dont l'une est soustraite par l'effet immédiat du décroissement, et les deux autres proviennent des rangées additionnelles, ce qui donne pour la quantité de molécules soustraites vers chaque angle, $1+2+3$. Si la seconde lame (fig. C) était de niveau avec la première par ses bords analogues

à QV, PN, etc., l'effet du décroissement se bornerait à soustraire vers chacun de ses angles une rangée de plus que dans la précédente, ce qui ferait quatre rangées; mais l'extension qu'elle reçoit vers chacun de ses bords la met dans le même cas que si, ayant été d'abord complète, elle avait subi un décroissement de deux rangées de plus, ce qui donne pour la quantité de molécules soustraites vers chaque angle,

$$1+2+3+4+5+6.$$

En appliquant le même raisonnement aux autres lames, on en conclura que chacune ajoute à la progression donnée par la lame précédente trois nouveaux termes, dont l'un est le résultat immédiat du décroissement, et les deux autres proviennent des rangées additionnelles. Les nombres des termes, dans les progressions successives, étant 3, 6, 9, 12, etc., leur expression générale sera $3n$; et parce que dans chaque progression le premier terme et la différence entre un terme et l'autre sont l'unité, la somme des termes sera $\frac{9n^2+3n}{2}$. Donc, puisque le côté de chaque lame censée complète est $c+2n$, le nombre de rhomboïdes contenu dans chaque lame, y compris les rangées qui lui sont communes avec celles qui s'appliquent sur les faces adjacentes, sera représenté par

$$(c+2n)^2-4\frac{(9n^2+3n)}{2} \text{ ou } (c+2n)^2-2(9n^2+3n).$$

Donc l'ensemble des six lames qui composeraient

une couche quelconque, dans l'hypothèse où il n'y aurait point de rangée commune, serait

$$6(c+2n)^2-12(9n^2+3n).$$

108. Remarquons maintenant que dans les décroissemens sur les angles, chaque rangée soustraite fait disparaître une arête de molécule sur l'un et l'autre des bords adjacens à l'angle qui subit le décroissement; et parce que chaque bord aboutit à deux angles, il perd autant de fois deux arêtes de molécule qu'il y a de rangées soustraites. Donc l'expression générale du bord, en supposant la lame complète, étant $c+2n$, et celle du nombre de rangées soustraites étant $3n$, le nombre de molécules qui restent sur la portion de chaque bord que le décroissement n'atteint pas, ou, ce qui revient au même, le nombre de molécules qui composent la rangée additionnelle à laquelle répond cette portion de bord, sera

$$c+2n-2\times 3n=c-4n.$$

Donc retranchant six fois cette quantité de l'expression que nous avons trouvée plus haut, on aura

$$6(c+2n)^2-12(9n^2+3n)-6(c-4n),$$

pour la somme des molécules contenues dans les six lames qui composent une couche quelconque du rang n.

109. Pour trouver la loi de la seconde série, je remarque d'abord que le nombre total des lames de



superposition est égal au nombre de demi-diagonales de molécules situées en allant de O vers A (fig. 98), depuis la diagonale *ar* jusqu'au centre γ de la face EAIO, ou ce qui revient au même, il est égal au nombre c d'arêtes de molécule situées sur l'un quelconque des côtés EO, OI, etc., moins l'unité.

Nous avons vu que le nombre de molécules qui composent chaque rangée additionnelle sur l'une quelconque des lames de la première série, a pour expression générale $c-4n$. Or, dans la lame qui termine cette série, la rangée dont il s'agit se réduit à une seule molécule, telle que K (fig. C). Donc alors, $c-4n=1$, et $n=\frac{c-1}{4}$. Dans ce même cas, n représente aussi le nombre des lames que renferme la série. Mais $c-1$ exprime le nombre total des lames qui appartiennent aux deux séries. Donc $3\frac{(c-1)}{4}$ exprimera celui des lames dont est formée la seconde série. Donc celle-ci renferme trois fois autant de termes que la première, ce qui fournit un moyen facile pour reconnaître à laquelle des deux séries se rapporte une lame du rang n.

Soit n' le rang d'une lame quelconque de la seconde série prise en partant du sommet. Les nombres de molécules comprises dans les différentes lames indiquées par les figures I, H, G, F, etc., seront successivement $1, 1+4, 1+4+8, 1+4+8+12$, etc. (1);

(1) Voici de quelle manière on peut trouver la suite des

ce qui donne pour chaque lame, abstraction faite de l'unité, une progression arithmétique dans laquelle 4 représente à la fois le premier terme et la différence entre chaque terme et le suivant, et $n'-1$ désigne le nombre des termes; ajoutant donc l'unité à la somme qui résulte de ces données, on aura pour la somme totale relative à une lame quelconque,

$$2(n'-1)^2+2n'-1.$$

110. Maintenant, soit toujours n le rang d'un terme quelconque, en partant de la première de toutes les lames de superposition; $c-1$ étant le nombre total des lames comprises dans les deux séries, on aura

$n=c-1-n'+1$, ou $n=c-n'$. Donc $n'=c-n$.

Si l'on substitue cette valeur de n' dans l'expression

$$2(n'-1)^2+2n'-1,$$

celle-ci devient

$$2(c-n-1)^2+2c-2n-1.$$

---

nombres qui correspond à une même lame, par exemple à celle de la figure D. On prend d'abord la molécule centrale, ensuite les molécules situées autour de celle-ci sur quatre lignes parallèles aux côtés du carré c', f', h', g', et l'on continue de même, en prenant les molécules qui répondent aux côtés des divers carrés concentriques que l'on peut tracer sur la surface de la lame. On a donc cette suite, 1, 8, 16, 20, 12, 4, qu'il ne s'agit plus que d'ordonner ainsi, 1, 4, 8, 12, 16, 20.



superposition est égal au nombre de demi-diagona
de molécules situées en allant de O vers A (fig.
depuis la diagonale *εν* jusqu'au centre γ de la
EAIO, ou ce qui revient au même, il est é
nombre c d'arêtes de molécule situées sur l'u
conque des côtés EO, OI, etc., moins l'unité.

Nous avons vu que le nombre de moléc
composent chaque rangée additionnelle
quelconque des lames de la première sér
expression générale $c-4n$. Or, dans la la
mine cette série, la rangée dont il s'agi
une seule molécule, telle que K (fi
alors, $c-4n=1$, et $n=\frac{c-1}{4}$. Dan
n représente aussi le nombre des lam
la série. Mais $c-1$ exprime le nombr
qui appartiennent aux deux séries.
primera celui des lames dont est
série. Donc celle-ci renferme tr
termes que la première, ce qu
facile pour reconnaître à laquel
rapporte une lame du rang n.

Soit n' le rang d'une lame ... s trian-
conde série prise en partant d ... pport des
de molécules comprises dans ... es qui re-
diquées par les figures I, H ... et c'est effec-
cessivement $1, 1+4, 1+4+$ ... s ce que nous

(1) Voici de quelle maniè ... e; es, ne sont pas

... limites entre les-
... dont il s'agit.
... ens à
... 3
... ur
... *ms*,
... tout
... ôté *ms*
... lieux des
... l'on élève
... culaires qui
... une arête de
... endiculaires se
... (fig. 96). Mais le
... es *Oe*, *es* (fig. 96),
... ui dont les côtés ont
... , *t*, *x* (fig. 100). Les
... tance entre *x*, *z*, d'une
... , sont les analogues des
... point *k* (fig. 100), situé à
... points *c* et *d*, est l'analogue
... Or, la distance entre *o* et *k*
... fois la ligne *on* (fig. 100), qui
... r du triangle mensurateur, et la
... oints *k* et *x* (fig. 100), égale six fois
... térieur, ce qui est conforme au rap-
... ntre les nombres de lames qui compo-
... séries. La propriété qu'a le triangle *msn*
... e représenter le triangle *zxt*, dans les



résultats de la théorie, provient de ce qu'il est inscrit à ce dernier, en sorte que les lignes semblablement tirées dans l'un et dans l'autre font les mêmes fonctions.

Il résulte du rapport $\frac{1}{3}$ entre les nombres des lames qui composent les deux séries, que la somme totale de celles qui s'élèvent au-dessus d'une même face du noyau est un nombre pair, et si l'on suppose, comme cela est naturel, que la dernière lame se réduise à une simple molécule, le nombre des arêtes de molécule comprises dans chaque côté du noyau sera nécessairement impair, comme le représente la fig. 98 A. Dans le cas où il serait pair, la dernière lame deviendrait un assortiment de quatre molécules cubiques réunies sous la forme d'un prisme carré.

113. Concevons maintenant que l'octaèdre secondaire ait pour noyau un rhomboïde AA′ (fig. 101), tel que celui de $104^d \frac{1}{2}$, qui appartient à la chaux carbonatée, et qu'il provienne aussi d'un décroissement par une rangée sur tous les angles de ce rhomboïde. L'arrangement respectif des molécules composantes sera encore le même, et ainsi les angles solides A, E, O, etc. (fig. 102), coïncideront encore avec les centres des faces de l'octaèdre. Mais parmi ces mêmes faces il n'y en aura plus que deux qui soient des triangles équilatéraux, savoir, les faces *bdf*, *enp*, situées autour des sommets A, A′, les six autres faces qui ont pour centre les angles solides E, O, I, etc., seront des triangles isocèles *dpf*, *bed*, *edp*, etc.

Or, les angles supérieurs EAI, EAG, etc., sur lesquels agissent les décroissemens qui donnent les triangles équilatéraux, n'étant pas dans le même cas que les angles inférieurs EOI, EHG, etc., et ces derniers étant différens des angles latéraux EOA', IOA', qui concourent avec eux à la production des triangles isocèles, l'octaèdre doit être considéré comme le résultat de trois décroissemens qui se rapportent aux trois espèces d'angles dont nous venons de parler, et qu'il convient de distinguer entre eux, puisqu'ils sont représentés par autant de triangles mensurateurs, dont chacun a des dimensions particulières. Mais pour simplifier nos conceptions à l'égard des décroissemens qui se combinent dans la formation des triangles isocèles, nous pouvons à volonté regarder chacun de ces triangles, par exemple le triangle *edp*, comme produit en vertu d'un décroissement par une rangée sur l'angle inférieur EOI, dont l'effet se prolonge au-dessus des faces EOA'H, IOA'K, ou comme produit en vertu d'un décroissement par une rangée sur les angles latéraux EOA', IOA', dont l'effet se prolonge en dessus de la face EOIA, et il semble d'abord indifférent d'adopter l'une ou l'autre manière de voir. Il est cependant à remarquer que par une suite de la position verticale qu'a maintenant l'axe du noyau, en passant par les sommets A, A', le trapézoïde $d\gamma O\delta$ qui résulte du décroissement sur l'angle EOI, se rejette vers la partie inférieure de cet axe, en sorte que son inclinaison à l'égard de celui-ci est

en sens opposé de celle du rhombe EOIA, sur lequel il est censé avoir pris naissance, tandis que les trapézoïdes $e\gamma O\varepsilon$, $p\delta O\varepsilon$, qui résultent des décroissemens sur les angles latéraux EOA′, IOA′, sont tournés vers les faces EOA′H, IOA′H, auxquelles appartiennent ces mêmes angles. Cette considération semble fournir, dans le cas présent, une raison de prendre pour décroissement principal celui qui a lieu sur les angles latéraux, et de regarder l'autre comme n'étant qu'auxiliaire.

Mais si le décroissement sur l'angle inférieur se faisait par deux rangées, auquel cas les décroissemens sur les angles latéraux deviendraient intermédiaires (*voyez* p. 122), alors il conviendrait, ainsi que je l'ai déjà dit, de donner la prééminence au premier. Ainsi, la position de chaque face du cristal secondaire étant donnée d'après la considération d'un seul des triangles mensurateurs relatifs aux divers décroissemens qui concourent à la production de cette face, c'est en général la raison de la plus grande simplicité qui détermine le choix de ce triangle.

114. Les décroissemens qui ont lieu sur les angles supérieurs EAI, IAG, etc. (fig. 101), étant indépendans de ceux qui se rapportent aux angles latéraux, supposons que ceux-ci existent seuls, et que les sommets soient libres de tout décroissement. Alors les parties des lames de superposition situées vers ces mêmes sommets, au lieu de décroître s'étendront de manière à s'envelopper les unes les autres par les

résidus de leurs bords supérieurs, et l'effet de cette extension sera le même que si les triangles *dpf*, *dcb*, *edp*, etc. (fig. 102), s'étaient prolongés en dessus des faces *bdf*, *enp*, jusqu'à s'entrecouper, d'où il est aisé de conclure que le solide secondaire sera un rhomboïde aa' (fig. 102), plus alongé que le noyau. Dans le cas présent, où ce noyau est le rhomboïde de $104^{d}\frac{1}{2}$ qui appartient à la chaux carbonatée, le cristal secondaire est le rhomboïde de $78^{d}\frac{1}{2}$ dont j'ai déjà parlé, et que j'appelle *inverse*, pour des raisons qui seront exposées dans la suite.

115. Pour mieux concevoir la différence entre la structure de ce rhomboïde et celle de l'octaèdre représenté (fig. 102), imaginons que toutes les lames de superposition qui recouvrent la face AEOI (fig. 102 et 103), se projettent sur un même plan, comme on le voit fig. 104. Les grandes faces de ces lames seront d'abord des eptagones, tels que $mmm'm'm''m''m'''$, dont les côtés $m'm'$, $m''m''$, diminueront progressivement, jusqu'à ce qu'ils soient réduits à une simple arête de molécule. Dans le cas présent, où l'on s'est borné à neuf molécules sur chaque côté du noyau, le terme dont il s'agit a lieu dès la seconde lame. La grande face extérieure de celle-ci est l'eptagone $rrr'r'r''r''r'''$, qui est sensiblement un pentagone, à cause des côtés presque infiniment petits $r'r'$, $r''r''$. Il en est de même des grandes faces des lames suivantes, qui sont successivement les eptagones $uuu'u'u''u''u'''$, $xxx'x'x''x''x'''$, etc., que l'on peut assimiler à des pentagones.



116. Il y a ici une observation à faire par rapport à la dernière lame, qui, en supposant que le décroissement ait atteint sa limite, doit être composée d'une simple rangée de molécules désignée par *qν*. Or, tandis que les bords supérieurs *mm*, *rr*, *uu*, etc., des grandes faces qui appartiennent aux autres lames se dépassent mutuellement d'une quantité égale à une rangée, ceux qui ont la même position sur la dernière lame, et qui sont indiqués par *nν*, *n'ν*, doivent rester de niveau avec les bords *νν*, $\nu\nu'''$, relatifs à la lame précédente. Car, l'uniformité de la structure exigerait que l'excès de la dernière lame sur celle qui la précède se réduisît à un simple rhomboïde désigné par *νελζ*, et qui laissât entre lui et la lame précédente un vide *ννε*, égal à celui qui existe, aux endroits correspondans sur toutes les autres lames. Mais l'affinité laisse échapper ce rhomboïde, dont l'adhérence avec le cristal serait censée nulle, puisqu'il ne tendrait à compléter celui-ci que par son sommet inférieur.

117. Si l'on compare la figure 103 avec la 104*, et que l'on prenne la série des lames de superposition, en partant de la dernière, c'est-à-dire de celle qui est composée de la rangée indiquée par *qν* (fig. 104), il est facile de voir que cette rangée représente l'arête *da* (fig. 103), d'où il suit que celle-ci est parallèle à la diagonale oblique qui va de A en O. La lame suivante, désignée par $\nu\nu\nu'\nu'\,\nu''\nu''\nu'''$ (fig. 104), correspond à un pentagone $\nu\nu\nu'\nu''\nu'''$ (fig. 103), pris par une section faite en dessous de *ad*, et parallèle à la

face AEOI, et ainsi des autres lames. C'est ce que confirme le résultat de la division mécanique du rhomboïde secondaire, qui a toujours lieu suivant des plans situés entre l'arête *ad* et le rhombe AEOI, parallèlement à celui ci. La même comparaison fait voir encore que les arêtes latérales, telles que *ed*, *pd*, sont produites par la suite des arêtes $r'r'$, $u'u'$, $x'x'$, etc., $r''r''$, $u''u''$, $x''x''$, etc., qui s'élèvent comme par échelons les unes au-dessus des autres.

118. Je placerai ici une remarque que j'ai déjà insinuée, en parlant de l'octaèdre régulier originaire du cube (p. 137), et qui s'applique au rhomboïde que nous venons de considérer, ainsi qu'à une multitude d'autres formes secondaires, produites par des décroissemens soit sur les bords, soit sur les angles. Elle consiste en ce que certains points terminaux ou certains bords situés sur le solide géométrique dont nous nous servons pour représenter le résultat de la cristallisation, n'ont pas d'existence réelle sur ce dernier, mais y sont remplacés par d'autres points ou par des plans presque infiniment étroits, dont les différences de position avec les points et les bords analogues sur le solide représentatif échappent à nos sens par leur petitesse. Ainsi le sommet géométrique du dodécaèdre métastatique représenté (fig. 81) est l'extrémité *s* de l'arête E*s* (fig. 80); mais le sommet physique est le point culminant s' de la dernière des couches composées des lames de superposition prises trois à trois. Dans le rhomboïde que l'on voit (fig. 103), le sommet

géométrique est le point *a*, et le sommet physique est le point *v* (fig. 104), qui termine supérieurement la dernière des lames empilées sur la face AEOI (fig. 101) de la forme primitive. Les arêtes *da*, *ed* (fig. 103), n'existent de même que géométriquement parlant; l'analogue de la première, sur le rhomboïde produit par la nature, est la rangée de rhombes situés en dessous de cette arête, et compris entre les points *v*, *v* (fig. 104); et l'analogue de la seconde est, comme je l'ai déjà dit, la suite des petits côtés $u'u'$, $x'x'$, $z'z'$, etc., des eptagones qui forment les faces extérieures des lames de superposition. Plus les molécules seront déliées et plus les parties extrêmes du solide de la nature approcheront de se confondre avec celles qui leur correspondent sur le solide de la Géométrie, et qui en sont comme les limites. Mais quoiqu'elles ne puissent jamais atteindre ces limites, les solutions des problèmes qui sont l'objet de la théorie n'en sont pas moins rigoureuses, parce que les positions des plans géométriques auxquels elles se rapportent dépendent uniquement du mécanisme de la structure, en sorte que de ces trois choses, les inclinaisons respectives des plans dont il s'agit, la forme des molécules et leur arrangement, les deux premières étant censées connues, la troisième, savoir, l'arrangement des molécules, ou, ce qui revient au même, la loi de décroissement à laquelle elles sont soumises, se détermine à l'aide du calcul, avec toute la précision que l'on peut désirer.

119. Reprenons le noyau cubique représenté (fig. 95), et supposons que les lames de superposition empilées sur ses différentes faces, subissent vers leurs angles un décroissement qui ait lieu, non plus par une simple rangée de molécules, mais par deux rangées. Alors les trois faces produites autour de chaque angle solide tel que O, seront encore des trapézoïdes, puisque la marche des décroissemens est la même, quant à sa direction, que dans le cas de l'octaèdre (fig. 96), et qu'elle est seulement devenue plus rapide. Mais ces trapézoïdes ne seront plus de niveau; ils s'inclineront les uns sur les autres d'une quantité que l'on détermine par le calcul. La surface du cristal secondaire sera donc composée de vingt-quatre trapézoïdes distincts (fig. 105), dont la réunion produira huit angles solides tels que O, composés de trois plans, et six angles solides tels que s', composés de quatre plans. Les premiers, qui seront les termes de départ des décroissemens, se confondront avec ceux du noyau. Les autres répondront aux angles s, m', s', etc. (fig. 96), avec cette différence, qu'ils seront plus rapprochés des faces du cube primitif. Je déterminerai dans la suite les inclinaisons respectives des trapézoïdes.

La structure de l'octaèdre régulier que nous avons considéré précédemment, et celle du solide à vingt-quatre trapézoïdes qui vient de nous occuper, ont lieu dans deux variétés de fer sulfuré. Nous verrons dans la partie analytique ces mêmes formes reparaître

sous un autre point de vue où la première fait à l'égard de la seconde la fonction de noyau.

120. Avant de terminer ce qui concerne les dé-croissemens sur les angles, je vais en citer quelques [illegible] cristallines [illegible] structure pourrait [illegible] voudraient la [illegible] pas à pas, en prenant la syn-[illegible]

[illegible] qui repré-sente [illegible] de la baryte sulfatée, et sup-posons [illegible] B, B' (fig. 106), de ses bases, soient les termes de départ d'un décroissement par une simple rangée, de manière que la superpo-sition des lames décroissantes n'ait lieu qu'en dessus de ces mêmes bases, sans aucune intervention de dé-croissemens auxiliaires.

Soit ABCD (fig. 107) la base supérieure prise pour exemple, sous-divisée en quatre-vingt-un petits rhom-bes qui soient les bases d'autant de molécules sous-tractives, ce qui fait neuf rhombes sur chacun des côtés AB, BC, etc. Si nous imaginons que toutes les lames de superposition dont la base ABCD est recou-verte, se projettent sur le plan de cette même base, il est facile de voir que leurs projections seront suc-cessivement les hexagones AγιCϑζ, AμνCπλ, etc., de manière que celle de la dernière lame se réduira à une simple rangée de rhombes AC. Il en résulte que les faces produites par le décroissement seront des

triangles isocèles ODP, OBP (fig. 108), qui s'élèveront en partant des angles D, B (fig. 106), et se réuniront en OP (fig. 108), parallèle à la diagonale menée de A en C (fig. 106). Les surfaces de ces triangles seront produites par les angles solides de molécules, contigus aux lignes $\gamma\epsilon$, $\zeta\vartheta$, $\mu\nu$, $\lambda\pi$ (fig. 107), et la ligne OP (fig. 108), qui est leur base commune géométrique, sera remplacée par la rangée de rhombes AC (fig. 107), qui représente le sommet physique du cristal.

En même temps que les lames de superposition décroissent vers leurs angles, elles restent de niveau par les portions de bords $C\epsilon$, $C\nu$, $C\vartheta$, $C\pi$, etc. (fig. 107), que le décroissement n'atteint pas; et parce que ces portions de bords vont elles-mêmes en diminuant, les facettes latérales qui leur correspondent sur les lames de superposition forment par leur assemblage des triangles DPC, BPC, etc. (fig. 109), qui étant sur le même plan que les faces CDFG, BCGL, du noyau, convertissent celles-ci en trapèzes PDFS, PBLS, etc. (fig. 108 et 109). Le solide secondaire est donc dans cette hypothèse un octaèdre, ayant pour faces quatre triangles ODP, PBO, RSF, SLR, qui sont le résultat du décroissement, et quatre trapèzes PDFS, PBLS, ODFR, OBLR, composés des faces latérales du noyau et de leurs prolongemens.

121. Mais les octaèdres de baryte sulfatée qui dérivent du décroissement indiqué, se présentent sous un aspect tout différent de celui dont la figure 108

faut naître l'idée. Leur alongement, au lieu de se faire de bas en haut, se fait dans le sens d'un axe qui passerait par les milieux des arêtes CG, AN (fig. 106), ainsi qu'on le voit figure 110, où le noyau est représenté inscrit dans l'octaèdre secondaire. Cet octaèdre a encore pour faces quatre trapèzes et quatre triangles isocèles ; mais il y a échange entre les positions de ces deux espèces de polygones considérés dans les deux octaèdres, ainsi qu'on en jugera en comparant les figures 108 et 110. Il s'agit donc de ramener le mécanisme de la structure au résultat qui donne le second octaèdre.

Pour y parvenir, concevons que le décroissement agisse à la fois sur les trois angles plans qui concourent à la formation de chacun des angles solides D, B, L, F, et imaginons, comme dans le cas du premier octaèdre, que toutes les lames qui recouvrent la base ADCB se projettent sur un même plan, comme on le voit (fig. 107). Alors les faces latérales des lames de superposition ne resteront plus de niveau aux endroits que le décroissement n'atteint pas ; mais elles s'étendront par des additions de nouvelles rangées, en sorte que les grandes faces de la première seront semblables à l'hexagone *r'r''hhrr*, celles de la seconde à l'hexagone *s's''kkss*, celles de la troisième à l'hexagone *t't''llt*, et ainsi des autres. Parmi les lames qui s'appliquent sur les faces latérales, bornons-nous à considérer celles qui s'élèvent au-dessus du pan CDFG (fig. 110). Si nous imaginons que toutes ces lames se

projettent sur le plan de cette même face, elles produiront l'assortiment que représente la figure 113, et dans lequel les grandes faces de la première lame sont indiquées par l'hexagone $hhh''h''h'h'$, celles de la seconde par l'hexagone $kkk''k''k'k'$, celles de la troisième par l'hexagone $lll''l''l'l'$, et ainsi des autres.

122. Dans la figure 107, les suites de petits rhombes comprises, l'une entre DC et *hh*, une seconde entre *hh* et *kk*, une troisième entre *kk* et *ll*, etc., sont les faces supérieures des rangées additionnelles de molécules dont j'ai parlé plus haut. Dans la figure 113, les suites de petits rectangles comprises entre les lettres correspondantes, savoir, DC et *hh*, *hh* et *kk*, etc., représentent des facettes latérales appartenant aux mêmes rangées, savoir, celles qui sont tournées vers la face CDFG, d'où l'on voit que chacune de ces rangées additionnelles est commune à deux lames de superposition appliquées sur des faces voisines, ainsi que nous l'avons déjà observé par rapport à d'autres variétés de cristallisation (*voyez* p. 92).

123. Les lames empilées sur la face CDFG commencent par se dépasser aussi mutuellement vers leurs bords parallèles à DF, en sorte que la première reçoit en cet endroit une nouvelle rangée comprise entre DF et $h''h''$, et qui lui est commune avec la lame correspondante, qui s'applique en même temps sur la face ADFM (fig. 110). Dans la lame suivante, la rangée additionnelle se réduit à une seule molécule désignée par $l''l''k''k''$ (fig. 113), et au-delà de ce

terme les lames de superposition éprouvent une retraite en sens opposé, de manière que les petits côtés verticaux $l'l''$, $m''m''$, $n'n''$, des hexagones, s'alignent sur la direction TU (fig. 110), et produisent avec ceux qui leur correspondent de l'autre côté l'apparence d'une arête située au même endroit.

124. D'une autre part, les côtés *hh* (fig. 107 et 113), *kk*, *ll*, qui restent hors de la portée des décroissemens, diminuent aussi, quoique plus lentement, en sorte que le terme de ces diminutions a lieu dans les lames représentées par $y'y''ppyy$ (fig. 107), et $ppp''p''p'p'$ (fig. 113), où la rangée additionnelle n'est plus composée que de deux molécules situées entre les points p, p. Le décroissement alors a lui-même atteint sa limite, à l'égard des lames de superposition empilées sur les faces latérales du noyau. Mais la dernière des lames situées parallèlement aux bases étant celle qu'indique l'hexagone $y'y''ppyy$ (fig. 107), le cristal est susceptible de s'accroître encore dans le sens vertical, par l'addition d'une rangée de molécules appliquée sur celle qui est désignée par pv', et égale à cette dernière. Soit $p\vartheta$ (fig. 111) la molécule qui termine cette nouvelle rangée en dessus de $pzo\delta$ (fig. 107) : il est aisé de voir que son bord inférieur pz (fig. 111) coïncidera avec le bord supérieur pz (fig. 113) du quadrilatère $pzo\lambda$, de manière que la facette $pz\gamma$ (fig. 111) se trouvera sur le même plan que ce quadrilatère ; et ainsi l'addition de la rangée dont il s'agit n'exige pas qu'une nouvelle lame

soit appliquée sur celle que représente $ppp''p''p'p'$ (fig. 113); elle ne fait que prolonger cette lame, en lui ajoutant deux petits quadrilatères placés l'un en dessus de $o\lambda pz$, et l'autre en dessous de $o'\lambda'p'z'$.

125. La figure 107 représente chaque lame de superposition parallèle à la base ADCB, dans l'état où est cette lame au moment même où elle est censée s'appliquer sur celle qui est en dessous. Mais à mesure qu'une nouvelle lame s'ajoute aux précédentes, toutes les rangées situées parallèlement à la diagonale AC sur ces mêmes lames augmentent d'une molécule vers chacune de leurs extrémités. Cette addition provient des lames qui s'appliquent en même temps sur les faces latérales du noyau. Bornons-nous à considérer l'effet de celles qui sont parallèles à la face DCGF (fig. 110 et 113).

Supposons qu'il n'y ait encore que la lame $r'r''hhrr$ (fig. 107) qui se soit appliquée sur la base ADCB. La rangée qui la termine vers l'angle D sera composée de trois molécules dont les angles extérieurs seront sur la ligne $r''h$. La lame correspondante au-dessus de la face DCGF (fig. 113) sera celle que représente l'hexagone $h''h''h'h'hh$. Concevons maintenant une nouvelle lame $s's''kkss$ (fig. 107), appliquée sur la précédente; son analogue au-dessus de DCGF (fig. 113) sera $k''k''k'k'kk$. Soit $n\psi$ (fig. 112) la molécule à laquelle appartient la facette $v\omega\psi\varphi$ (fig. 113), considérée sur la même lame. Le point ω situé immédiatement en dessous de k (fig. 107) se trouvant alors

[illegible] $r'r''hhrr$, et les points σ, π, [illegible] plan, se confondant avec ceux [illegible] les mêmes lettres (fig. 112), [illegible] petit rhombe $\nu\omega\sigma\pi$ se placera à la [illegible] (fig. 107) est la petite diagonale, [illegible] projetant vers l'autre extrémité de [illegible] le nombre des facettes qui la [illegible] au lieu de quatre qu'il était [illegible]

[illegible] l'application de la nouvelle [illegible] déterminera une addition [illegible] relativement à chacune des rangées [illegible] les deux lames précédentes, dans [illegible] $r'k$, $s''k$, et ainsi de suite.

[illegible] en général a, b, c, d, etc., les nombres [illegible] dans les rangées terminales [illegible] sur les différentes lames de superposition. [illegible] après l'application de la première [illegible] la seconde, $a=6$, $b=7$; [illegible] $a=8$, $b=9$, $c=10$; après [illegible] $a=10$, $b=11$, $c=12$, $d=13$; [illegible] La partie de la surface du trapèze [illegible] en dessus du point D vers [illegible] par des rangées situées de [illegible] à cette arête, qui sont dues aux [illegible] sur les faces latérales du noyau, et [illegible] qui répond à $k''k''$ (fig. 113), [illegible] dans le cas présent, où chaque [illegible] renfermer neuf arêtes de

molécule (1). Soient m, s, t, y, z, les nombres de molécules comprises dans ces deux rangées, en commençant par la plus basse. Ces nombres seront dans l'ordre de ceux que présente la série a, b, c, d, etc., en sorte que si $a=4$, on aura $m=0$, $s=0$, $t=1$, $y=2$, $z=3$. Si $a=6$, on aura $m=1$, $s=2$, $t=3$, $y=4$, $z=5$. Si $a=8$, on aura $m=3$, $s=4$, $t=5$, $y=6$, $z=7$; etc. On voit par là que, dans le cristal complet, le nombre des molécules comprises dans chaque rangée surpasse d'une unité celui des molécules que renferme la rangée précédente.

127. Le résultat précédent donne la limite théorique de la structure de l'octaèdre secondaire; c'est cette limite que représente la figure 110. Mais la cristallisation dépasse cette limite, en produisant des octaèdres plus alongés, suivant des rapports très variables, dans le sens des arêtes TU, XZ, et dont l'un se voit fig. 114. Cet alongement a lieu par une addition de lames constantes, égales à celle qu'indique l'hexagone $ppp''p''p'p'$. La projection de celle qui s'applique immédiatement sur cet hexagone est représentée par $zzz''z''z'z'$, et ainsi des suivantes. De plus, il faut concevoir que la rangée terminale py' (fig. 107), s'alonge proportionnellement vers chaque extrémité, par l'addition d'un nouveau rhomboïde $p\tau$, ou $y'\omega$,

(1) C'est une suite de ce que la distance entre le point m'' pris inférieurement, et le point D, est égale à cinq hauteurs de molécule.

nouvelle lame dans le

imite (fig. 110), et
au rapport des arêtes
et avec la petite diago-
110), et à laquelle ces
le nombre de petites
contenues dans la diagonale
comme l'arête O′P′ (fig. 110),
arête TU. Nous avons vu
de cette dernière arête
la rangée additionnelle
superposition dans le sens
à une simple molécule
le rang de la lame qui
côté $h''h''$ de la rangée addi-
première de toutes les lames
quatre unités que le côte DF du
noyau, nombre d'arêtes de molécule
renferme et la même différence se répé-
tant d'une lame à l'autre, si nous désignons aussi
par u le nombre dont nous venons de parler, attendu
qu'il est égal à celui des diagonales de molécule com-
prises dans la diagonale de la base du noyau, la série
des rangées additionnelles, en partant de la première
lame, formera une progression arithmétique décrois-
sante, dont le premier terme sera $u-4$, le dernier
sera l'unité, et la différence entre un terme et l'autre
sera 4, ce qui donne $n = \frac{u-1}{4}$.

129. Maintenant il est aisé de voir que le nombre de toutes les lames appliquées sur la base ABCD (fig. 107) peut être représenté par $u-1$, et si nous faisons abstraction de la dernière lame désignée par *py*, et qui est censée être ajoutée après la formation complète de l'arête TU (fig. 110), le nombre dont il s'agit devient $u-2$. Or, ce nombre est composé de deux parties, dont l'une renferme les lames dont l'application a précédé la formation de TU, de manière que n désigne aussi le rang de la dernière de ces lames, et l'autre partie renferme les lames dont l'application correspond à la formation de cette même arête TU. Le nombre de celles-ci sera donc

$$u-2-n, \text{ ou } (u-2)-\frac{(u-1)}{4}=\frac{3u-7}{4}.$$

Mais ce dernier nombre est en même temps égal à celui des petits côtés $l''l''$, $m''m''$, $n''n''$, etc. (fig. 113), des lames qui s'appliquaient en même temps sur la face latérale CDFG (fig. 110); et parce que l'arête TU est l'assemblage de tous les côtés analogues à ceux dont il s'agit, la somme des distances entre le premier $k''k''$ (fig. 113) et le second $l''l''$, entre celui-ci et le troisième $m''m''$, sera égale à la moitié de la même arête, et il est facile de voir que chacune de ces distances est égale à une petite diagonale Ar' (fig. 107) de molécule (1). Or, le nombre de ces mêmes di-

(1) Pour estimer ces distances il faut remettre par la pensée les côtés $k''k''$, $l''l''$, etc., à leurs véritables places qui sont ici représentées en projection.



$n'n'$, etc.,

Donc $\frac{3u-7}{4}$

iagonales de

e l'arête TU.

entée par $\frac{3u-7}{2}$.

de l'arête ter-

e chaque lame

BCD (fig. 107),

ernière lame py',

e dans le sens

e molécule, sa-

ale AC (fig. 107).

excepté la der-

$$-2)=3u-4.$$

Donc

$$-4=23.$$

de rapports

en faisant varier

dans le noyau,

varier, la

à faire.

l'arête TU

sur les

(fig. 113)

se réduisait à une simple molécule, et qu'alors le rang n de cette lame avait pour expression $\frac{u-1}{4}$; or, cette hypothèse étant la plus simple et la plus naturelle que l'on puisse faire, il en résulte que la quantité $\frac{u-1}{4}$ doit toujours être un nombre entier, quelle que soit la valeur de u; et ainsi le nombre des diagonales de molécule comprises dans la diagonale AC (fig. 106), ou, ce qui est la même chose, le nombre des arêtes de molécule contenues dans chaque côté du noyau sera nécessairement un des termes de la série 5, 9, 13, 17, etc.

131. Le rapport que nous venons de considérer est celui qui existe entre deux limites physiques dont l'une, qui est située vers le sommet, répond à l'hexagone $zy'z''zp\delta$ (fig. 110), qui est le même que celui de la figure 107, et l'autre, qui est située dans la partie latérale, répond au rectangle presque infiniment étroit $\mu\nu\omega\pi$, qui est tangent à l'arête $k''k''$ (fig. 113), et à toutes les autres qui appartiennent à la rangée de molécules placée au même endroit. Les limites géométriques correspondantes sont les arêtes O'P' (fig. 110) et TU, et il est facile de trouver leur rapport, qui n'est pas tout-à-fait le même que celui des limites physiques.

On voit d'abord que l'arête O'P' (fig. 110) étant comprise entre les mêmes lignes verticales que la diagonale py' de l'hexagone $zy'z''zp\delta$, il n'y a de ce côté



aucune différence entre les deux limites, en sorte que l'on peut aussi désigner O'P' par t, et faire, comme ci-dessus, $t=3u-4$.

Soient O'TUP', R'TUS' (fig. 115) les mêmes trapèzes que figure 110, et $\mu\pi\omega\eta$ (fig. 115) le même rectangle que figure 110. Soit $\gamma\xi$ (fig. 115) le bord supérieur de la rangée qui suit immédiatement celle à laquelle appartient le rectangle $\mu\pi\omega\eta$; par les points μ, π, menons μI et πK perpendiculaires sur $\mu\pi$. D'après ce qui a été dit plus haut, que chaque rangée renferme une molécule de plus que la précédente, $\gamma\xi$ surpasse $\mu\pi$ d'une quantité égale à une grande diagonale de molécule. Donc $\gamma\lambda$ et $\mu\xi$ sont égales chacune à une demi-diagonale de molécule. Maintenant l'arête TU étant à la même distance de $\mu\pi$ et de $\eta\omega$, il en résulte que Tμ est égale à la moitié de $\gamma\mu$. Donc, si nous menons Tδ et Uε perpendiculaires sur TU, les lignes $\mu\delta$, $\pi\varepsilon$ sont aussi égales chacune à la moitié de $\gamma\lambda$; donc $\mu\delta$ et $\pi\varepsilon$ valent chacune un quart de diagonale, d'où il suit que l'arête TU est plus petite que l'arête $\gamma\xi$ d'une quantité égale à une demi-diagonale. Or, nous avons eu $\gamma\xi$ ou $r=\frac{3u-7}{2}$. Soit TU $=r'$; nous aurons $r'=\frac{3u-7}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3u-8}{2}$. Dans le cas présent, TU : O'P' ou

$$r' : t :: \frac{3u-8}{2} : 3u-4 :: \frac{19}{2} : 23.$$

132. Cherchons le cas où l'on aurait $r'=\frac{1}{2}t$. Soit x

la quantité qui doit être ajoutée ou retranchée de chacune des expressions précédentes, pour que ce cas ait lieu. Nous aurons

$$\frac{3u-8}{2}+x : 3u-4+x :: 1 : 2.$$

D'où l'on tire $x=4$; c'est-à-dire qu'alors le solide se trouverait augmenté de quatre enveloppes situées en dessus des faces P'US', P'ZS', O'TR', O'XR', en sorte que les nombres de diagonales de molécules comprises dans les arêtes TU, O'P', deviendraient

$$\frac{19}{2}+4 \text{ et } 23+4, \text{ ou } \frac{27}{2} \text{ et } 27,$$

ce qui donne le rapport indiqué.

133. Si l'on se borne à diviser un cristal de la variété dont il s'agit ici, par des plans parallèles aux bases de la forme primitive, en partant des arêtes TU, XZ, on obtiendra de part et d'autre une suite de lames hexagonales dont la dimension en longueur, comprise entre O'R' et P' S', sera constante et égale à O'P' ou R'S', et dont la dimension en largeur, perpendiculaire à la précédente, diminuera d'une lame à l'autre, de manière que s'il nous était donné de pousser la division mécanique jusqu'à sa limite, la dernière lame se réduirait à une simple rangée de molécules, représentée par *py'* (fig. 107). Cette observation peut servir à faciliter l'exécution d'un modèle en bois de la même variété. Si l'on suppose que le côté de la forme primitive soit composé de neuf arêtes de molé-

ment à leurs étendues respectives, ou, si on l'aime mieux, relativement aux divers rapports entre les lignes TU, O'P' (fig. 110). Mais la forme du cristal a une limite géométrique différente de la limite théorique, et qui a lieu lorsque l'arête TU étant nulle, toutes les faces du cristal sont des triangles, ainsi qu'on le voit (fig. 116). Pour faire la synthèse d'un cristal qui offrirait cette limite, il faudrait d'abord concevoir des lames de superposition qui s'appliquassent simultanément en dessus des différentes faces du noyau, comme il a été expliqué plus haut, jusqu'au terme où la rangée additionnelle située parallèlement à l'arête DF (fig. 113) se réduit à une simple molécule désignée par *k''k''*. Soit *b*H*l* (fig. 116) le triangle qui, dans ce moment, est composé de la somme des bords parallèles à la diagonale AC (fig. 110). Si la superposition des lames continuait, au-delà de ce terme, en dessus des faces latérales CDFG, ADFN, il se formerait une arête dans le sens de TU, ce qui est contraire à l'hypothèse présente. Donc, pour que le mécanisme de la structure s'accorde avec cette hypothèse, il faudra imaginer que la série des lames de superposition parallèles à la base ABCD continue seule de fournir à l'accroissement du cristal, jusqu'à l'entière formation des triangles O'HP', O'YP' (fig. 116). Il est extrêmement rare de rencontrer cette modification parmi les cristaux de baryte sulfatée; presque tous offrent à la place de l'angle solide H une arête TU (fig. 110) plus ou moins alongée.

cules, on t [illegible]
base hexag [illegible] veut ra-
d'une mol [illegible] ture d'un
côtés para [illegible] poser que
gones que [illegible] te à un cer-
l'hexagon [illegible] t principal
ce que c [illegible] deux dé-
de molé [illegible] ction d'un
molécul [illegible] l'un d'eux
la rang [illegible] passé lequel
et *l*. Les [illegible] qu'ils mar-
crés de [illegible] jusqu'à ce
trans et [illegible] citer un ou
figure. [illegible] ques, relati-
chettes [illegible]
longue [illegible] solitaire par
dimin [illegible] cubique
t''l et [illegible] ans rhombes
dire [illegible] même agis-
céde [illegible] du même
cul [illegible] 6). Con-
les [illegible] se com-
pa [illegible] aire aura
ce [illegible] fig. 117),
g [illegible] les huit
3 [illegible] second.
[illegible] AEOI
[illegible] divisée
[illegible] chaque
[illegible] molécules.

Supposons d'abord que le décroissement sur les angles agisse seul; le contour de la première lame de superposition sera semblable à l'octogone $ttuut't'u'u'$. Concevons au contraire que ce soit le décroissement sur les bords qui agisse solitairement; le contour de la première lame de superposition sera représenté par le carré $xxx'x'$. Or, les côtés de l'octogone étant situés extérieurement par rapport au carré $xxx'x'$, il est visible que dans l'hypothèse où les deux décroissemens seraient censés naître en même temps, l'effet du décroissement sur les bords rendrait nul celui du décroissement sur les angles, qui se trouve pour ainsi dire en arrière par rapport au premier, et le même retard continuant d'avoir lieu sur toutes les nouvelles lames de superposition que l'on peut imaginer à la suite de la précédente, jamais les deux décroissemens ne pourraient s'associer et marcher de concert vers le but proposé. La cristallisation ne produirait qu'un dodécaèdre rhomboïdal, sans mélange de facettes relatives à un octaèdre.

137. Concevons maintenant que les lames de superposition ne subissent d'abord que le décroissement sur les angles, et que cet effet ait lieu, par exemple, seulement sur les deux premières. Le contour de celle qui s'applique immédiatement sur le noyau étant toujours semblable à l'octogone $ttuut't'u'u'$, celui de la suivante sera représenté par l'octogone $aabba'a'b'b'$. Supposons qu'à ce terme le décroissement sur les bords commence à agir conjointement avec l'autre. Les



135. Nous [illegible] etc.,
mener à la [illegible] $.b'b'$,
cristal, on est [illegible] de la
l'effet d'un d [illegible] la troi-
tain terme p [illegible] $d'd'$;
agit solitaire [illegible] ctogone
croissemens [illegible] gone...
cristal, il e [illegible] rme où
agisse seul [illegible] et au-
l'autre com [illegible] rds agira
chent ensui [illegible] ie d'une
qu'ils aient [illegible] nt la der-
deux exemp [illegible] par $sss's'$.
vement à l'o [illegible] ne part, les

136. J'ai [illegible] angles du
une rangée [illegible] nant que le
donnait pou [illegible] ngles agit
(fig. 68), et [illegible] s deux dé-
sait seul par [illegible] sorte que le
noyau prod [illegible] e molécule.
cevons que l [illegible] ., qui ré-
binent l'un [illegible] constantes
vingt faces, [illegible] ent, et ils
résulteront [illegible] ière que le
autres d, d' [illegible] me. Consi-

Soit EF ([illegible] ons sur les
(fig. 119) l [illegible]
en facettes [illegible] angles agit
côté renferm [illegible] de l'oc-

aèdre régulier originaire du cube, que j'ai exposée plus haut, en sorte que si le décroissement s'arrêtait au terme où l'autre est sur le point de s'associer avec lui, la forme secondaire serait un cube P (fig. 120), dont chaque angle solide se trouverait remplacé par un petit triangle équilatéral δ, qui serait la somme des bords croissans *u't*, *b'a'* (fig. 119), sur les lames de superposition disposées autour d'un même angle solide du noyau. Tandis qu'ensuite les deux décroissemens se combinent l'un avec l'autre, il se produit autour du triangle δ (fig. 120) trois nouveaux triangles $a\varepsilon\nu$, $b\varepsilon\pi$, $c\nu\pi$ (fig. 121), qui lui sont égaux et semblables. Si nous prenons pour exemple le premier qui est désigné par $a\varepsilon\nu$, il est facile de voir qu'il est la somme des bords décroissans *d'c'*, *f'e'*, *h'g'*, etc. Ces nouveaux triangles, joints au premier, composent un triangle unique *d* (fig. 117), qui est tourné en sens contraire du triangle δ (fig. 120).

A l'égard du décroissement sur les bords, dont l'origine est sur une ligne *a'a'* (fig. 117), située au milieu des côtés *o'o''*, *o'o''*, des triangles *d*, *d'*, son effet, pendant qu'il agit conjointement avec l'autre, est de produire, de part et d'autre de la ligne *a'a'*, un rectangle, tel que *a'a'o'o'*, qui est la somme des bords constans *a'a'* (fig. 119), *c'c'*, *e'e'*, etc., et tandis qu'ensuite il agit seul à son tour, il produit au-delà de chaque rectangle un triangle isocèle, tel que *o'Ro'* (fig. 117), qui est l'assemblage des bords décroissans *p'p'* (fig. 119), *r'r'*, etc., en sorte que la totalité



lignes de départ n
du noyau, mais l
qui appartienne
seconde lame de
sième sera donc
celui de la qua
eeffé'f'f'; celu
gghhg'g'h'h',
l'octogone pass
delà de ce term
seul à son tour
série de lames
nière se rédui

Il y a ici d
bords *tu*, *zy*,
noyau vont
décroisseme
seul, et din
croissemen
dernier *mn*
D'une autr
gardent ce
jusqu'au
décroisse
dernier
dérons l
figures

138.
seul, to

sur les angles agissait seul, par h' celle qui répond à l'action simultanée des deux décroissemens, et par h'' celle qui se rapporte à l'action solitaire du décroissement sur les bords.

Si nous considérons les différences en largeur entre chaque lame et la suivante dans le sens de la diagonale AO, il est aisé de voir que chacune d'elles étant mesurée vers chaque angle O ou A, par une demi-diagonale de molécule, le nombre de toutes les lames de superposition, ou celui qui représente la somme H de leurs hauteurs, sera égal à autant de demi-diagonales de molécule qu'il y en a depuis O jusqu'en s', c'est-à-dire que l'on aura $H = c - 1$.

141. Remarquons maintenant que la ligne $o\lambda$ (fig. 121) mesure autant de fois la distance entre le bord qui répond à $u't'$ (fig. 119) sur la première des lames de superposition, et celui qui répond à $y'z'$ sur la seconde, que la quantité h renferme d'unités, et que la ligne $a\lambda$ mesure autant de fois la même distance que la quantité h' renferme d'unités. Donc, puisque le point o (fig. 121) est au centre du triangle δ, on aura

$$o\lambda : a\lambda :: 1 : 3 :: h : h'.$$

Donc $h + h' = 4h$; ajoutant le nombre h'' de hauteurs relatif à l'action solitaire du décroissement sur les bords, on aura $H = 4h + h''$, ou $4h + h'' = c - 1$.

La structure n'offrant aucune limite directe, relativement au rapport entre les étendues des faces d, s, on peut adopter, si on le veut, celle qui dérive de l'hypothèse que le nombre des lames de superposi-



des [illegible] accroissement sur
pro[illegible] à l'ac-
[illegible] bords. Dans
[illegible] — 1, ou
res[illegible]
nan[illegible]
poi[illegible]
ce q[illegible] figure 119,
des l[illegible], diminué
taire [illegible] Si on suppose
moin[illegible] condition
rapp[illegible] il doit être
en s[illegible], etc.
la lar[illegible] triquement
grand[illegible] des faces d, s
caèdr[illegible] nous venons
comp[illegible] observer que
cettes [illegible] exactement
lieu, [illegible] senté par la
les bo[illegible] résulte qu'à la
On ob[illegible] h et h'' sont
que j'a[illegible] différence peut être
des ex[illegible] dans laquelle
140. [illegible] de h'' au
prises [illegible] de celle qui
nombre [illegible] prise au centre
la diago[illegible]
des lam[illegible] fig. 121) $= 20\lambda$;
teurs de [illegible] fois la distance
relatives [illegible] (fig. 119) sur

deux lames consécutives de superposition, que h renferme d'unités, $\lambda\pi$ (fig. 121) mesurera autant de fois la même distance que $3h$ renferme d'unités ; donc $a\pi$ la mesurera autant de fois qu'il y a d'unités dans $6h$. Maintenant, si nous prenons la distance entre les bords de deux lames consécutives de superposition situées parallèlement au côté OI (fig. 119), il est facile de voir que la ligne $o'o''$ (fig. 117), qui est la même que ac (fig. 121), et qui est parallèle à RR' (fig. 117) mesure pareillement autant de fois cette dernière distance qu'il y a d'unités dans la quantité $6h$. Mais RT la mesure autant de fois qu'il y a d'unités dans h''. Donc $o'o'' : \mathrm{RT} :: 6h : h'' :: 6 : 1$, à cause de $h''=h$. Donc $o'a'=3\mathrm{RT}$. Mais $\mathrm{GT}=o'a'$. Donc

$$o'a' : \mathrm{RG} :: 3 : 4. \text{ Donc } o'o''=\tfrac{3}{4}\,\mathrm{RR}',$$

ce qui suffit pour construire le solide proposé, conformément à la limite que nous avons adoptée.

143. La distinction des époques auxquelles répondent les actions initiales des divers décroissemens qui se combinent pour produire une même forme secondaire, a encore lieu toutes les fois que ces décroissemens ont leurs lignes de départ situées parallèlement l'une à l'autre.

Prenons pour exemple le cristal représenté (fig. 122), qui appartient à la variété de chaux fluatée que j'appelle *cubo-triémarginée*, parce qu'elle offre l'aspect d'un cube dont chaque bord est remplacé par trois facettes. Ces facettes rapportées au véritable noyau,



[illegible] résultent de deux décrois-
[illegible] celles qui sont désignées
[illegible] pour celles qui le sont
[illegible] à l'octaèdre le cube
[illegible] la théorie prouve que
[illegible] d'un décroissement par
[illegible] de ce cube, et que les fa-
[illegible] décroissement par trois ran-
[illegible] sens que le premier,
[illegible] commence à l'endroit où celui-ci
[illegible] nécessaire, ses lignes de
[illegible] éloignées des bords ; du vé-
[illegible] décroissement est censé
[illegible] ou que les facettes qu'il
[illegible] largeur. Mais elles ne sont
[illegible] de ces bords dans les ré-
[illegible] qu'elles sont situées sur
[illegible] qu'elles terminent, comme
[illegible] sur la face du noyau à
[illegible] parallèle.

[illegible] plusieurs lois de décrois-
[illegible] production d'une même forme
[illegible] les plus voisines du centre
[illegible] points de contact avec le véri-
[illegible] sont les dernières qui dis-
[illegible] divise mécaniquement le cristal
[illegible] Si parmi les autres facettes
[illegible] dues à une même loi de dé-
[illegible] les prolonge par la pensée

jusqu'à ce qu'elles se rencontrent, elles seront dans le même cas que si le décroissement dont elles dépendent avait agi immédiatement sur les bords ou sur les angles d'un noyau plus volumineux que le véritable, et dans lequel celui-ci serait inscrit. Par exemple, les facettes *s*, *s* (fig. 122), étant celles qui sont contiguës aux bords du véritable noyau, imaginons que les facettes *x*, *x*, s'étendent jusqu'à s'entrecouper en masquant les facettes *s*, *s*. Leurs lignes de rencontre pourront être considérées comme les bords d'un cube qui aura de plus grandes dimensions que celui qui fait la fonction de noyau relativement aux facettes *s*, *s*, en sorte que, dans l'état actuel des choses, les facettes *x*, *x*, sont censées être la continuation de celles qui auraient pris naissance sur les nouveaux bords dont on vient de parler. Dans le langage ordinaire on substitue ces mêmes bords à ceux du véritable noyau, substitution d'autant plus admissible que le solide auquel ils appartiennent est censé n'être autre chose que ce noyau lui-même, qui se serait accru jusqu'à un certain terme sans subir aucune modification.

A l'égard des angles que font les facettes *x* et *s*, soit avec les faces *i* du noyau, soit entre elles, il est si facile de les déterminer d'après les lois de décroissement par une et par trois rangées qui les produisent, que je me contenterai de les indiquer ici. Incidence de *s* sur *i* 135^d; de *x* sur *x* $126^d\,56'\,8''$; de *x* sur *s* $153^d\,28'\,4''$.



qui est l'octaèdre réguli [illegible] semens, l'un simple, p [illegible] par s, l'autre intermé [illegible] ethode analy- par x. Mais si nous s [illegible] dépendent comme noyau hypo [illegible] on ne prend les facettes s sont [illegible] pour résoudre une rangée sur les [illegible] on se propose cettes x dépenden [illegible] auquel tel dé- gées qui a lieu d [illegible] parvient à l'aide mais qui évidem [illegible] j'ai donné l'idée se termine. Par [illegible] urs. C'est dans le départ sont d'a [illegible] de triangles que la ritable noyau [illegible] mules dont elle se avoir duré pl [illegible] progressive de la a produites [illegible] dérivent. pas censées [illegible] au but que se pro- sultats de [illegible] chose à désirer pour la lame de [illegible] satisfaire en éclairant le sont les [illegible] j'ai déjà cité, à l'occa- laquelle [illegible] chaux carbonatée et

144. E [illegible] exemples de la mé- sement c [illegible] pour ainsi dire pas cristallin [illegible] analytique franchit sont celle [illegible] marche analogue à celle table noy [illegible] l'ordre de la struc- paraisse [illegible] successivement sur les pour a [illegible] semblable à celui de ce on cho [illegible] subir toutes les croisse [illegible] de la forme

…osée. Je vais reprendre ici le même sujet, dont …développement tient à la considération des décroissemens que j'ai appelés *auxiliaires*, parce qu'ils secondent l'effet du décroissement principal, auquel tout le reste se rapporte.

146. Lorsqu'un même bord ou un même angle solide sert de terme de départ à divers décroissemens qui agissent sur les deux faces que réunit l'arête dont il s'agit, ou sur les trois faces qui interviennent dans la formation de l'angle solide, et cela de manière que les nouvelles faces qui en résultent soient inclinées entre elles, chaque décroissement est considéré comme un effet distinct qui se rapporte à une série de lames de superposition empilées sur la face primitive vers laquelle est tournée celle qui est produite par ce décroissement. Mais supposons que les nombres de rangées soustraites des deux côtés d'une même arête, ou autour d'un même angle solide, soient dans un tel rapport que les faces secondaires dont ils déterminent les positions se trouvent de niveau deux à deux dans le premier cas, ou trois à trois dans le second, de manière à n'en former plus qu'une; alors on pourra considérer celle-ci comme le résultat d'un seul décroissement dont l'effet se prolonge en sens contraire de celui suivant lequel agit ce décroissement. Or, le prolongement dépend à son tour soit d'un décroissement que subissent les lames appliquées de l'autre côté de la même arête, soit de deux décroissemens qui ont lieu sur les autres

Des Décrois[illegible] qui [illegible]nt dits

145. Dans les appli[illegible]pporte tique aux résultats des [illegible] de dé- les variations des for[illegible] on peut strictement que les d[illegible] à l'égard chaque problème; et [illegible]ir entre est de déterminer la [illegible] est censé croissement donne [illegible]tôt quelles d'un construction tr[illegible] décider du en parlant des tria[illegible] petit espace occup[illegible] théorie puise les [illegible]croissemens sert pour représ[illegible]pétera à l'é- structure et les pr[illegible] que je l'ai

Mais ce qui su[illegible] ou les trois pose le géomètr[illegible]rent, et ainsi celui dont l'espr[illegible] les cas où tous la route qui con[illegible]ne rangée, soit sion du rhomboï[illegible] de quelques au[illegible] les bords sont thode synthéti[illegible]teront qu'un à pas l'intervall[illegible] rapidement, en[illegible] pentagones de l'artiste qui [illegible] j'ai développé ture d'un cr[illegible]ir que ce so- différentes fa[illegible] d'un décrois- cristal, des [illegible] sur deux bords variations q[illegible] considérant le [illegible]eur qui agit

re côté des mêmes bords comme auxiliaire à du premier. On pourrait aussi supposer que le cas inverse qui eût lieu; mais la première sition paraît être la plus naturelle, et celle qui ggérée de préférence par l'aspect du dodé-re.

le décroissement en largeur avait lieu par trois, re, cinq rangées, ou davantage, son auxiliaire ait par le même nombre de rangées en hauteur. général, quand deux décroissemens agissent des ıx côtés d'un même bord, de manière que les deux es qui en résultent sont sur un même plan, celui quel on rapporte l'effet principal a toujours pour uxiliaire son inverse. On peut en dire autant des décroissemens mixtes. Par exemple, si le premier décroissement a lieu par trois rangées en largeur et par deux rangées en hauteur, son auxiliaire agira par deux rangées en largeur et par trois en hauteur.

149. Les décroissemens sur les angles sont principalement ceux qui méritent de fixer l'attention, et exigent un certain développement. Soit AA′ (fig. 123) un parallélépipède quelconque qui subisse un décroissement par deux rangées sur l'angle O de la base AEOI. Le nouveau bord que le décroissement fera naître sur la première lame de superposition sera dirigé suivant *bc*, et si par le point *n* on élève *nz* parallèle et égale à *Og*, qui représente une arête longitudinale de molécule, elle mesurera la dimension du décroissement dans le sens de la hauteur; d'où il suit

[illegible] passera par oz, en même temps [illegible] à bc. Donc le plan bcg, qui s'a- [illegible] dessous de la base que la face pro- [illegible] dessus, à cause de l'égalité et du pa- [illegible] nes nz. Og, sera situé parallèlement [illegible]

[illegible] Si l'on considère le décroisse- [illegible] est censé agir sur la face EOA'H, [illegible] gauche l'effet du décroissement [illegible] aisément que la première lame [illegible] appliquée sur cette face ayant son [illegible] le décroissement auxiliaire [illegible] par les soustractions de molécules [illegible] la ligne qui fait à l'égard de ce [illegible] même fonction que nz, par rapport [illegible] à la base, doit être égale et paral- [illegible] deux arêtes latérales de molé- [illegible] l'on doive en conclure que le dé- [illegible] par deux rangées en hauteur de [illegible] La même conséquence paraît se [illegible] de la ligne gc, et de la dimen- [illegible] du décroissement qui intervient [illegible] dans les lames de superposition [illegible] OA KI. Cependant nous allons [illegible] ne donne que l'équiva- [illegible] croissement, et qu'il est nécessaire [illegible] une marche différente, pour [illegible] avec celui du décroisse-

[illegible]

151. Soit GAH (fig. 124) la moitié inférieure d'une face d'un rhomboïde obtus, coupée dans le sens de la diagonale horizontale; et soient AHH'A', AGG'A', des portions des deux faces adjacentes; je choisis ici la forme rhomboïdale, parce qu'elle nous fournira plus bas une application des principes qui vont être exposés. Concevons que la face dont il s'agit subisse un décroissement par deux rangées sur l'angle A, dont l'effet se borne aux lames de superposition qui s'élèvent au-dessus d'elle. Les trois rhombes P, *o*, *o'*, resteront à vide, puisque le décroissement agit par deux rangées. Les angles solides extérieurs γ, δ, ζ, des trois molécules qui ont pour faces supérieures les rhombes *a*, *b*, *c*, composeront le bord que le décroissement fera naître sur la première lame de superposition. Les deux rangées de rhombes *a*, *b*, *c*, et *a'*, *b'*, *c'*, *c''*, resteront à vide sur la surface supérieure de cette même lame, par l'effet du décroissement, et le nouveau bord de la seconde lame sera composé des angles solides extérieurs des molécules qui ont pour faces supérieures les rhombes *d*, *e*, *f*, *g*, *h*. Il est facile de continuer cet assortiment par la pensée. Dans le même cas, les rhombes E, K, L, S, E', K', L', S', feront continuité avec les faces AHH'A', AGG'A', du rhomboïde générateur adjacentes à AG, AH, et que nous avons supposé être libres de tout décroissement.

152. Concevons maintenant que ces dernières subissent des décroissemens auxiliaires qui prolongent

que la [illegible] L'assortiment de-
qu'elle [illegible] représente la fig. 125.
bais[illegible] du décroissement
duit [illegible] à la face AHH'A'
rall[illegible] de superposition sera
à la [illegible] qui ont pour faces supé-
[illegible] m, n, p, etc. (fig. 125),
m[illegible] dont les faces supé-
p[illegible] ϑ, ε, r, s, u, x, z. On
[illegible]ment a lieu sur l'angle
[illegible] soustractions de molécules
[illegible] l'assemblage des deux rhom-
[illegible] fig. 125), une seconde celui
[illegible] et ainsi de suite. On voit
[illegible] lame n'a que l'épaisseur d'une
[illegible] trouver la quantité dont chaque
[illegible] première, dépasse la suivante.
[illegible] que le bord extérieur de la pre-
[illegible] suivant la direction $\sigma\chi$, et le bord
[illegible] seconde suivant la direction $\upsilon\psi$. La
[illegible] deux bords qui sont sur un
[illegible] tracés en lignes ponctuées
[illegible] des molécules de la pre-
[illegible] tracés en lignes pleines sont
[illegible] des molécules de la seconde.

[illegible] les lignes $\sigma\chi$, $\upsilon\psi$, représentera
[illegible] dont la première lame dépasse la
[illegible] $\sigma'\gamma$ perpendiculaire sur $\sigma\tau$,
[illegible] distance qui aurait lieu entre les

deux bords, dans le cas où le décroissement se ferait par une rangée de molécules doubles, puisque le triangle $\sigma\sigma'\tau$ étant la moitié d'une facette de ces molécules, la ligne $\sigma\tau$ est la diagonale de cette facette. Mais il est facile de voir que dans le cas représenté par la figure, la ligne $\gamma\lambda$ qui mesure la distance entre les deux lames que nous considérons est la moitié de $\sigma'\gamma$. C'est une suite de ce que la ligne $\upsilon\omega$ coupe en deux également le côté $\sigma'\tau$. Il résulte de là que le décroissement a lieu par une demi-rangée de molécules doubles, en sorte qu'il est l'équivalent d'un décroissement par deux rangées en hauteur des mêmes molécules, ainsi que l'indique la construction que l'on voit (fig. 123).

153. Si le décroissement principal avait lieu par trois rangées, le décroissement auxiliaire se ferait par un tiers de rangée de molécules triples, c'est-à-dire qu'il équivaudrait à un décroissement par trois rangées en hauteur des mêmes molécules. Dans l'hypothèse d'un décroissement principal par quatre rangées, la molécule soustractive serait quadruple de la véritable, et la distance entre deux lames consécutives serait le quart de celle qui répond à une rangée (1).

(1) En général, n étant le nombre de rangées soustraites en vertu du décroissement principal, le rapport entre les deux dimensions de la molécule sera celui de n à l'unité, et la distance entre deux lames consécutives sera $\frac{1}{n}$ de celle qui aurait lieu dans l'hypothèse d'une rangée soustraite.

l'effet du décroissement principal. L'assortiment
viendra semblable à celui que représente la fig [illegible]
Bornons-nous à déterminer l'effet du décrois[illegible]
auxiliaire qui agit parallèlement à la face [illegible]
(fig. 124). La première lame de superpo[illegible] [illegible]nt
terminée par les molécules qui ont pour [illegible] t or-
rieures les rhombes π, ν, i, k, m, n, p, [illegible] manière
et la suivante par les molécules dont [illegible] de celle
rieures sont les rhombes η, ζ, ϑ, ε, r [illegible] manière de
voit par là que le décroissement a [illegible] serait nul-
HAA' (fig. 124), par des soustrac[illegible] elle le ferait
doubles, dont l'une est l'assembl[illegible]composé, et en
boïdes indiqués par π, ν (fig. 125 [illegible] au décroisse-
des deux rhomboïdes ϑ, ε, et [illegible], la simplicité
de plus que chaque lame n'a [illegible] décroissement
molécule. Reste à trouver l[illegible]
lame, par exemple la premi[illegible] décroissemens qui agis-
Or, il est aisé de voir que l[illegible] sont tous inter-
mière est aligné suivant [illegible] regarde comme
intérieur de la seconde [illegible] les considérations
figure 126 représente c[illegible] préférence. Je vais en
même plan; les rhom[illegible]
sont les faces extéri[illegible] rhomboïde dans lequel les
mière, et les rhom[illegible] subissent chacun un
les faces extérieur[illegible] de molécules doubles.

La distance ent[illegible] ce qui a été dit plus
donc la quantit[illegible] de part et d'autre
seconde. Or, si l[illegible] triangles *ost*, *our*.
elle sera égal[illegible] lignes [illegible], mesurent

...nde une
...représente
... hauteur est
...e chose a lieu

...décroissemens que
...longent en dessous
...le d'un autre décrois-
...des deux côtés de l'an-
...croisées *st*, *ur*, et il est
...ent se fait aussi par des
...es doubles des véritables. Si
...t était pris pour le principal,
...rer comme ayant lieu par une
...qui en représente l'effet dans le
..., est égale à une arête de molécule.
...thèse, on raisonnerait des décroisse-
...*uo*, *so*, qui deviendraient auxiliaires,
...avons fait des décroissemens sur les an-
...GAA' (fig. 124), à l'égard de celui qui
...angle A de la face GAH, c'est-à-dire qu'il
...supposer aux décroissemens suivant *uo*, *so*,
...sure particulière dans le sens de la largeur,
...e à la condition que les prolongemens du dé-
...ement principal doivent s'assimiler à l'effet de ce
...nier. Mais telle serait cette mesure que je ne m'ar-
...terai point ici à déterminer, que la construction de
la figure 124 offrirait de même l'équivalent des dé-

croissemens auxiliaires. Si, au contraire, on regardait comme décroissement principal celui qui agit suivant l'une des directions *ou*, *os*, par une rangée de molécules doubles, la mesure du décroissement auxiliaire suivant les directions *st*, *ur*, se trouverait modifiée convenablement, pour que la condition à laquelle doivent être soumis les prolongemens fût remplie.

Or, il est à remarquer que les faces produites en vertu du décroissement qui agit sur l'angle *gzh*, se rejettent en sens contraire de la face *gzhy*, sur laquelle naît ce décroissement, tandis que les faces qui résultent du décroissement sur les angles latéraux *aoh*, *aog*, s'étendent directement en dessus des faces auxquelles appartiennent ces angles, et cette considération doit faire donner la préférence à ces derniers décroissemens, comme étant ceux dont le dodécaèdre porte le plus visiblement l'empreinte.

155. Je rappellerai ici que la théorie n'est autre chose que l'art de représenter d'une manière qui s'accorde avec l'observation l'arrangement des molécules d'où dépendent les formes secondaires; et lorsque nous sommes libres de choisir, comme ici, entre divers modes d'arrangement dont chacun peut également fournir les données du problème à résoudre, ce que nous avons de mieux à faire est de conformer notre choix aux conceptions dont notre esprit s'accommode le mieux.

J'ai promis de donner une application des prin-

cipes qui viennent d'être développés. Je prendrai comme exemple la variété de chaux carbonatée que j'appelle *prismatique*, dont les bases naissent d'un décroissement par une rangée sur les angles supérieurs du rhomboïde primitif, et les pans d'un décroissement par deux rangées sur les angles inférieurs; et je décrirai l'ordre de la structure, à l'aide d'une méthode synthétique analogue à celle que j'ai déjà employée par rapport à d'autres formes secondaires.

156. On voit (fig. 127) le prisme hexaèdre régulier de cette variété circonscrit à son noyau rhomboïdal, et dont l'axe est égal à celui de ce noyau. Cette condition est nécessaire pour ramener l'ordre de la structure du prisme à sa limite. Chaque côté du noyau est censé être composé de dix-huit arêtes de molécules intégrantes. La figure 128 représente la face UXYZ (fig. 127) du noyau, recouverte par la série des lames de superposition qui composent la partie correspondante du prisme. Pour bien concevoir les effets des variations que subissent ces lames, il faut imaginer que les plans ABCDEFGH, A'B'C'D'E'F'G'H' qui représentent leurs faces supérieures, se relèvent les uns au-dessus des autres d'une quantité égale à une épaisseur de molécule. Nous désignerons les lames dont il s'agit par les mêmes lettres.

157. Les lignes EF, E'F', MN, M'N', représentent les directions des nouveaux bords que le décroissement qui donne les bases fait naître sur les lames de

superposition, d'où il suit que ces bords se dépassent mutuellement d'une quantité égale à une demi-diagonale de molécule. Les lignes AB, A'B', IK, I'K', etc., sont les directions des nouveaux bords que le décroissement qui produit les pans fait naître sur les mêmes lames, et dont les distances respectives dans le sens de la largeur sont mesurées par une diagonale entière de molécule. Ces deux décroissemens suffisent pour déterminer le prisme. Les variations que nous allons considérer sont simplement auxiliaires, et l'on pourrait en faire abstraction, en leur substituant les prolongemens des faces produites par les deux décroissemens directs.

158. Dans la première lame de superposition ABCDEFGH, les deux rangées indiquées par BC, AH, et adjacentes aux bords YZ, YX, du noyau, sont destinées à le faire croître vers les parties de ces mêmes bords sur lesquelles le décroissement n'agit pas. Il en est de même des deux rangées indiquées par DE, GF, et adjacentes aux bords ZU, XU. Les décroissemens qui ont lieu suivant les directions CD, HG, font la fonction d'auxiliaires à l'égard de ceux qui agissent directement sur les angles YZK, YXH (fig. 127) du noyau, pour en prolonger les effets dans les intervalles compris entre Z et *fd* d'une part, et entre X et *lm* de l'autre. On voit à la simple inspection des petits espaces C$\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$D, que le décroissement suivant CD laisse à vide, qu'il se fait par des soustractions de molécules doubles. De plus, la di-

stance entre le bord CD et le point de départ Z, indique qu'il a lieu par une demi-rangée des mêmes molécules. C'est une suite de ce que cette distance n'est que la moitié de celle qui est entre le point ζ et le bord CD. On doit en dire autant du décroissement dirigé suivant HG.

Les mêmes considérations s'appliquent à la seconde lame A′B′C′D′E′F′G′H′, à l'égard de laquelle il nous suffira de remarquer que ses nouveaux bords C′D′, H′G′, qui sont l'effet du décroissement auxiliaire, sont dépassés par CD, HG, qui leur correspondent sur la première lame, d'une quantité égale à une demi-rangée de molécules doubles, conformément à ce qui a été dit relativement au résultat que représentent les figures 124 et 125.

Les rangées additionnelles analogues à celles qui sont indiquées par BC, B′C′, AH, A′H′, disparaissent sur la troisième lame IKLMNOI et sur les suivantes, mais l'addition des rangées parallèles aux bords ZU, XU, du noyau, et indiquées par LM, NO, L′M′, N′O′, etc., continue jusqu'à la sixième lame P′R′S′V′, exclusivement, en sorte que les figures de cette lame et de celles qui suivent sont des trapèzes, et la onzième lame *imlk*, qui est la dernière, se réduit à une simple rangée dont les molécules extrêmes sont indiquées par ϑ, ω.

159. Il se présente ici une considération qui ne doit pas être omise. Les points K, I, K′, I′, R, P, etc., situés aux angles inférieurs des lames de superposi-

[illegible] seraient [illegible] *ff'*, *ll'* [illegible] composés [illegible] se con- [illegible] Mais ces points [illegible] cristallisation. Par [illegible] disparait par une suite [illegible] triangle δKσ, en [illegible] située sur le côté de ce [illegible] composée de trois arêtes de [illegible] par rapport aux au- [illegible]

[illegible] et les autres qui leur cor- [illegible] suivantes, étant parallèles [illegible] distances qui les séparent étant [illegible] de molécule, nous en con- [illegible] arêtes compose une facette [illegible] produite en vertu d'un dé- [illegible] sur le bord YZ (fig. 127). [illegible] six pans dus au décroisse- [illegible] sur l'angle inférieur sont sé- [illegible] qui dérivent d'un décrois- [illegible] sur les bords inférieurs, mais [illegible] presque infiniment petite, [illegible] Il semble cependant que l'ac- [illegible] naissance à ces derniers pans déter- [illegible] une tendance à de nouvelles [illegible] prolongent de part et d'autre l'effet [illegible] décroissement que nécessite l'ordre de la struc-

ture. Car en observant à l'aide de la loupe, ou même à la vue simple, les parties situées à la jonction des pans $lff'l'$, $dff'd'$, etc., on y distingue souvent six autres pans extrêmement étroits, en sorte que le prisme est réellement dodécaèdre. Mais on néglige ces ébauches dans la distribution méthodique des variétés, et l'on ne donne le nom de *péridodécaèdre* qu'à celle qui offre les mêmes pans avec des dimensions très sensibles.

Les lames de superposition qui se recouvrent l'une l'autre en partant de la face UXYZ du noyau (fig. 128), sont successivement de trois figures différentes, savoir, celle de l'octogone, comme ABCDEFGH, celle de l'hexagone, comme IKLMNO, et celle du trapèze, comme $P'R'S'V'$. Cette gradation est l'inverse de celle que présente la division mécanique, en partant des sections qui se font parallèlement à l'arête *lf* (fig. 127), et aux autres qui sont tournées vers les faces du noyau. On aura une idée de cette dernière en reprenant ce que nous avons dit du résultat d'une opération semblable faite sur le prisme hexaèdre qu'on voit figure 33, pl. 3. Nous avons eu d'abord la figure du trapèze *loos* (fig. 34), ensuite est venue celle du pentagone AE*oo*I (fig. 35), parce que nous supposions au prisme une hauteur plus grande que celle qui a lieu dans le cas de la limite représentée (fig. 127). Mais si l'on ramène l'opération à cette limite, le pentagone se change en hexagone, par le retranchement de son angle supérieur A (fig. 35).



[illegible] forme subsiste dans les diverses lames [illegible] indiqué (fig. 36), où il faut encore [illegible] que l'angle A soit remplacé par un côté. [illegible] terme, les hexagones se quittent par [illegible] inférieurs o, o, et leur séparation détermine la formation de deux nouveaux côtés à la place de ces angles, ce qui convertit l'hexagone en octogone.

Des noyaux hypothétiques.

[illegible]. L'exposé que j'ai fait, dans les articles précédens, des diverses manières d'agir des lois de décroissemens auxquelles est soumise la structure des cristaux, suffirait déjà pour faire juger du grand nombre de variétés auxquelles un même noyau est susceptible de donner naissance, et ce que j'ajouterai dans la suite sur les combinaisons de ces lois dans la production d'un même cristal, fera encore mieux concevoir combien serait vaste le tableau qui présenterait la série de toutes ces variétés, même en se bornant à n'y placer les résultats les plus ordinaires des lois de décroissemens. Mais la théorie va beaucoup plus loin, et le développement de ses principes conduit à une autre conséquence non moins remarquable, savoir, que cette fécondité qui semblerait devoir être réservée exclusivement à la forme primitive donnée par la division mécanique, se communique à toutes les variétés du même genre, c'est-à-dire, par exemple, que si la forme dont il s'agit est un rhomboïde, comme

dans la chaux carbonatée, et si parmi tous les divers rhomboïdes qui peuvent en dériver, tels que l'équiaxe, l'inverse, le contrastant, etc., on en choisit un à volonté, et qu'adoptant ce rhomboïde pour noyau hypothétique, on le suppose composé de molécules qui lui soient semblables, on pourra obtenir toutes les autres formes par des lois régulières de décroissemens, soit sur les bords, soit sur les angles. La véritable forme primitive changera alors elle-même de rôle, pour aller prendre sa place parmi les formes secondaires. Quelques exemples suffiront pour donner une idée de cette sorte de souplesse des lois de décroissemens pour s'adapter aux différens types qu'on leur présente.

162. Choisissons pour noyau hypothétique le rhomboïde inverse de la chaux carbonatée. Si l'on suppose qu'il subisse un décroissement par une rangée sur ses bords supérieurs *ay*, *au*, *at* (fig. 129), c'est-à-dire semblable à celui qui donne l'équiaxe du véritable noyau, le rhomboïde secondaire *abfa'* prendra la forme de ce même noyau.

163. Le même décroissement transporté sur le rhomboïde contrastant *ama'o* (fig. 130), produira pour forme secondaire le rhomboïde inverse qui faisait la fonction de noyau dans l'exemple précédent (fig. 129). On voit ici, entre les rhomboïdes les plus ordinaires, de la chaux carbonatée, dont l'un est le primitif et les autres sont ceux qui en dérivent par

les décroissemens les plus simples, une filiation en vertu de laquelle l'inverse devient l'équiaxe du contrastant pris pour noyau hypothétique, le primitif devient celui de l'inverse, et le terme ultérieur étant celui qui répond au véritable noyau, le rhomboïde qu'il produit est aussi le véritable équiaxe. On peut continuer la série au-dessus et en dessous des termes précédens. Par exemple, le terme qui vient après l'équiaxe en montant, et qui serait par rapport à lui ce qu'il est à l'égard du véritable noyau, répond à un rhomboïde semblable à celui qui résulterait d'un décroissement immédiat par deux rangées sur les angles supérieurs du véritable noyau, et dont l'analogue existe dans la variété binaire de fer oligiste. Nous avons jusqu'ici cinq termes parmi lesquels le véritable noyau occupe le milieu, et les deux suivans de part et d'autre en dérivent immédiatement par des décroissemens très simples. Mais dans les termes ultérieurs les décroissemens qui remplacent ces derniers s'écartent de leur simplicité, et bientôt ils deviennent inadmissibles par leur complication.

164. Le rhomboïde inverse considéré de nouveau comme noyau hypothétique produira un rhomboïde *at'a'u'* (fig. 131) semblable à l'équiaxe (fig. 38, pl. 3), en vertu d'un décroissement par deux rangées sur les angles supérieurs *a* (fig. 131). Si le décroissement se fait par une seule rangée sur les angles latéraux *u*, *t* (fig. 132), il en résultera un rhomboïde AA' sem-

blable au contrastant (fig. 42, pl. 3). Si, en restant toujours sur les angles latéraux *u, t* (fig. 133), il agit par deux rangées, le résultat sera un dodécaèdre AA′ semblable au métastatique.

Enfin, si les bords latéraux D, D (fig. 134), du même rhomboïde hypothétique deviennent les lignes de départ d'un décroissement par trois rangées, on aura un nouveau dodécaèdre *ss′*, faità l'imitation de celui que je nomme *paradoxal*, et qui résulte d'un décroissement par une rangée de molécules doubles sur les angles latéraux du véritable noyau.

165. Je vais insister sur ce dernier résultat, parce qu'il offre un exemple d'un fait remarquable, qui a également lieu pour tous les décroissemens intermédiaires, soit sur les angles latéraux, soit sur les angles supérieurs et inférieurs, et d'après lequel on peut les considérer sous un point de vue qui les ramène à la simplicité des décroissemens ordinaires. Cette analogie est d'abord fondée sur ce que, dans ceux qui sont intermédiaires, le résultat est en général un dodécaèdre à triangles scalènes. Or, on peut toujours supposer un rhomboïde inscrit dans chacun de ces dodécaèdres, comme le véritable noyau l'est dans le métastatique. Nous avons vu que les six plans coupans qui mettent ce noyau à découvert passent, l'un par les arêtes EO, OI (pl. 3, fig. 46), un second par les arêtes OI, IK, un troisième par les arêtes IK, KG, et ainsi des autres. Maintenant, si l'on substitue au métastatique un dodécaèdre quelconque, produit par

les d [illegible] tels angles qu'on
vertu [illegible] noyau sera par con-
trasta [illegible] différente, on pourra
devie [illegible] hypothétiquement, des
celui [illegible] les arêtes analogues à
qu'il [illegible] mer, et se représenter
conti [illegible] dent les bords inférieurs
précé [illegible] le fait dont j'ai parlé
quiax [illegible] nomme est toujours une des
ce qu [illegible] vent naître du véritable
un rh [illegible] e dont il s'agit, étant
décro [illegible] me, est susceptible de
angle [illegible] re, en vertu d'un dé-
logue [illegible] ords inférieurs.
Nous [illegible] nous offre un résultat
vérit [illegible] thétique est semblable
de p [illegible] le produit d'un décrois-
des d [illegible] e, et celui qui donne le
ultéri [illegible] omboïde a lieu par trois
niers [illegible] décroissemens intermé-
vienn [illegible] ur est tantôt le rhomboïde
164 [illegible], ou quelqu'autre qui
comm [illegible] r une des lois de struc-
at'a' [illegible] semble communiquer
en ve [illegible] à la loi d'où résulte
les ar [illegible] le générateur.
se fait [illegible] thétiques origi-
(fig. [illegible] ent également par
[illegible] substituer aux

autres formes primitives, dans le cas des décroissemens intermédiaires. On en trouvera de nombreux exemples dans le cours de cet Ouvrage.

166. Il y a donc cette différence entre les deux espèces de décroissemens, que ceux qui suivent une loi ordinaire sont simples par eux-mêmes, au lieu que les autres étant compliqués, lorsqu'on les considère immédiatement, se résolvent en deux décroissemens ordinaires, dont l'un fait dépendre le noyau hypothétique du véritable, et le second établit la relation entre la forme proposée et le noyau hypothétique. Dans ces sortes de cas, la cristallisation semble ne s'écarter de la route qui aboutit à la simplicité que pour y revenir par une voie différente. Le cristallographe profite de ce circuit pour calculer par une méthode plus facile et plus expéditive les résultats des décroissemens intermédiaires. Elle consiste à déterminer d'abord la forme du noyau hypothétique, et la loi du décroissement ordinaire qui produit le dodécaèdre rapporté à ce noyau, ainsi que les incidences mutuelles de ces faces.

La même méthode lui fournit ensuite des données à l'aide desquelles une formule le conduit tout d'un coup à la détermination du décroissement intermédiaire qui agit sur le véritable noyau. Au moyen de cet artifice, il écarte les difficultés et les longueurs dans lesquelles l'aurait entraîné la solution directe du problème.

167. Dans toutes ces modifications où les formes

[illegible] semblent tour à tour rivaliser avec la [illegible]. Le résultat de la division mécanique [illegible] à cette dernière subsiste sans altération, et sa constance garantit l'unité d'espèce. Mais il y a plus. Et, dans l'hypothèse où la structure des cristaux [illegible] que je continue de prendre pour exemple, n'offrirait aucun indice de joints naturels, les considérations puisées dans la théorie elle-même pourraient encore faire reconnaître la forme primitive. On remarquerait d'abord que le rhomboïde de $104^d \frac{1}{2}$, lorsque son axe est situé verticalement, a ses faces inclinées de 45^d à un plan horizontal et à un plan vertical, ce qui lui imprime le caractère d'une limite, au-delà et en deçà de laquelle la différence entre les deux inclinaisons varie en sens contraire. Or, cette propriété qui fait ressortir le rhomboïde de $104^d \frac{1}{2}$ entre tous les autres, paraîtrait déjà annoncer qu'il en est aussi distingué comme étant le type de l'espèce à laquelle il appartient. De plus, nous avons vu que dans la série des rhomboïdes dont chacun est susceptible de naître du précédent, comme [illegible] celui de $104^d \frac{1}{2}$ tient le milieu entre deux rhomboïdes plus obtus et deux rhomboïdes aigus, qui en dérivent immédiatement à l'aide des lois les plus simples de décroissement. C'est aussi celui dont s'écartent en général ceux que l'on rencontre le plus communément dans la nature par des lois d'une simplicité [illegible] s'écarterait plus ou moins [illegible] même rhomboïde. Ajoutons

à ces caractères que les stries qui sillonnent les faces d'un certain nombre de cristaux calcaires, ont des directions qui s'accordent avec la condition que leur noyau soit le rhomboïde de $104^d \frac{1}{2}$, et nous en conclurons que la théorie seule, secondée des indices qu'offre l'aspect extérieur des cristaux, pourrait faire deviner la véritable forme primitive de l'espèce dont il s'agit, sans qu'il fût nécessaire de pénétrer, pour l'apercevoir, dans le mécanisme de la structure. Les mêmes considérations s'appliquent à beaucoup d'autres espèces de minéraux, dont les variétés sont assez nombreuses pour se prêter à une comparaison d'où l'on puisse tirer des inductions analogues à celles qui viennent d'être exposées.

168. Après tout, si cette multiplicité d'hypothèses qui naissent du développement de la théorie pouvait être regardée par quelques minéralogistes comme un luxe qui la surcharge, plutôt que comme une véritable richesse, on pourrait répondre que nous ne sommes pas les maîtres d'arrêter le cours des conséquences auxquelles nous conduit l'observation des phénomènes de la nature, et qu'en étudiant les résultats des lois auxquelles la sagesse et la puissance de son auteur l'ont soumise, nous devons nous efforcer de les envisager sous toutes leurs faces, d'en saisir tous les rapports mutuels, et nous servir de nos théories et de nos méthodes de calcul, comme d'instrumens propres à étendre la portée de notre esprit, à mesure que le point de vue lui-même s'agrandit.

secondaires s[illegible]
forme primiti[illegible]
qui conduit à [illegible] les actions sur
et sa consta[illegible] terminent les
a mieux, et [illegible] de tant de
cristaux cal[illegible] sont subor-
exemple, n[illegible] donné le nom
des considé[illegible] marquer par sa
pourraient [illegible] milieu des nom-
tive. On [illegible] les premières.
de $104^{d}\frac{1}{2}$, [illegible] de décroisse-
ses faces i[illegible] du noyau dont
un plan [illegible] peut substituer
d'une limi[illegible] de l'œil la po-
rence ent[illegible] de se présenter
traire. O[illegible] ces parties le nom
boïde de [illegible] fixer d'une ma-
indiquer [illegible] attacher à ce mot.
type de [illegible] théorie, l'effet d'un dé-
nous av[illegible] la quantité dont les
chacun [illegible] appliquées sur une
équiaxe, [illegible] mutuellement,
rhombo[illegible] angles de cette face.
qu'il p[illegible] un plus grand nom-
plus o[illegible] ils ont la même lon-
dont d[illegible] desquelles ils
plus fr[illegible] inclinées entre elles.
simpli[illegible] *identiques*, lors-
si on [illegible] égaux, ils sont

du même nombre de degrés, et font partie d'angles solides égaux. J'observerai à ce sujet que les diverses faces qui, dans une forme primitive, concourent à la formation d'un même angle solide, ne vont point au-delà de trois; du moins peut-on toujours les réduire à ce nombre (1).

Dans tout ce qui précède, nous avons comparé entre eux les bords ou les angles situés sur une même face. Maintenant, si nous comparons entre elles les diverses faces de la forme primitive, il sera évident que celles qui sont identiques, c'est-à-dire égales et semblables, doivent aussi s'assimiler les unes aux autres par les décroissemens que subissent les lames de superposition qui les recouvrent.

Par une suite nécessaire des mêmes principes, les bords ou les angles non identiques ne sont pas astreints à la répétition des mêmes décroissemens; c'est-à-dire que les uns peuvent en subir qui diffèrent de ceux auxquels les autres sont soumis, ou même rester libres, comme dans le cas où ils existeraient sur un noyau qui ne fît que s'accroître sans changer de forme. Je vais citer quelques exemples, pour mieux faire concevoir tout ce qui vient d'être dit.

---

(1) Cette réduction a lieu relativement à un octaèdre qui fait la fonction de forme primitive, au moyen de la substitution d'un parallélépipède à cet octaedre, ainsi que je l'expliquerai dans la suite. Les angles solides qui dans celui-ci résultaient de la réunion de quatre plans, se trouvent alors convertis en angles trièdres.

[illegible] (fig. 135, pl. 11) les bords [illegible] : il en est de même [illegible] a aussi identité entre [illegible] il n'en existe pas entre [illegible] entre l'angle supérieur A [illegible] on voit que les lettres [illegible] les angles du solide sont as- [illegible] le même accord se re- [illegible] toutes les autres espèces [illegible]

[illegible] (fig. 136) un prisme droit [illegible] de noyau, et dont [illegible] B, C, G, diffèrent entre [illegible] bords, qui étant pris deux [illegible] sont identiques. Il [illegible] entre les quatre angles de chaque [illegible] par exemple, n'est pas iden- [illegible] quoiqu'ils soient droits tous [illegible] côté B, qui appartient au pre- [illegible] du côté G, qui concourt [illegible] en sorte que l'égalité [illegible] au côté C, qui est commun [illegible]

[illegible] hypothèse, aucune des faces P, [illegible] avec l'une des deux autres, [illegible] un décroissement relatif à des lames [illegible] par exemple, sur [illegible] effet sera de produire une facette à [illegible] exigera le concours d'un second

décroissement relatif à des lames appliquées en même temps sur la face T, et qui produirait une autre facette inclinée en sens contraire de la première. Les trois faces sont, à cet égard, indépendantes l'une de l'autre, et la loi de symétrie demande seulement que tout ce qui a lieu par rapport à chacune d'elles se répète sur celle qui lui est opposée et parallèle.

171. Il n'en sera pas de même si les faces latérales M, M′ (fig. 137) du prisme sont identiques, ou, ce qui revient au même, si la base est un carré. Alors le même décroissement qui agirait, par exemple, à la gauche de G, et dont le résultat serait une facette plus inclinée sur M que sur M′, se répétera à la droite de la même arête, pour produire une seconde facette dont l'incidence sur M′ sera égale à celle de la première facette sur M. Il pourrait cependant arriver que, dans le même cas, l'arête G ne fût remplacée que par une seule facette; mais alors celle-ci ferait un angle de 135^{d} avec l'une et l'autre des faces M, M′; on pourrait la considérer comme étant l'effet de deux décroissemens simultanés par une rangée, qui agiraient des deux côtés de l'arête G, de manière que les deux facettes qui en résulteraient coïncidassent sur un même plan.

Enfin, si le solide qui fait la fonction de noyau est un cube, il suffira qu'un décroissement ait lieu sur un de ses bords ou sur un de ses angles, pour qu'il se répète sur tous les autres, qui sont, pour ainsi dire, à l'unisson du premier. Il n'y aura pas plus de

170. Dans un rh [illegible] it
supérieurs B, B, [illegible] n'y
des bords inférieu [illegible] orme
les angles latérau [illegible] érem-
les bords B, D, n [illegible]
et l'angle inféri [illegible] ce que
indicatives des b [illegible] rie, en
sorties à la loi de [illegible] le par-
trouve dans la [illegible] rapports
de formes primi [illegible] primi-
Soit mainten [illegible] es, doit
rectangulaire f [illegible] s solides
par conséquent [illegible] résulte
elles. Il est visi [illegible] ect des
à deux portent [illegible] èce de
y a aussi iden [illegible]
face. Mais l'a [illegible] ulfatée
tique avec l'a [illegible] est un
les deux, pa [illegible] M, T,
mier, diffèr [illegible] qui
à la forma [illegible] 10d,
n'existe qu [illegible] pro-
à l'un et à [illegible] ent,
Dans l [illegible] isme
M, T, n [illegible] me
si l'on c [illegible] me,
de super [illegible] si-
la face M [illegible]
la place [illegible]

a base. Si au contraire on adopte comme forme itive un prisme semblable à celui qui résulterait prolongement des pans M, T, dans cette hypo-se, les pans *r*, *r*, résulteront d'un décroissement r ses quatre bords longitudinaux, dont la mesure pendra du rapport entre les côtés de la base du même prisme. Or, la loi de symétrie indique que cette base ne peut être un carré; car si cela était, les pans *r*, *r*, ne pourraient être le résultat d'un décroisse-ment par une simple rangée; autrement elles feraient un angle de 135ᵈ avec chacun des pans adjacens M, T. Elles seraient donc produites par une autre loi, et dans ce cas elles devraient se répéter vers les faces T, en faisant avec elles un angle de 140ᵈ, égal à l'incidence de *r* sur M, et avec cette dernière face un angle de 130ᵈ égal à l'incidence de *r* sur T. La forme primitive ne peut donc être qu'un prisme à bases rhombes, ou un prisme à bases rectangles. Or, la division mécanique donne des joints parallèles les uns aux pans M, T, et les autres aux pans *r*, *r*; mais les premiers sont incomparablement plus nets et plus faciles à obtenir, et cette considération jointe à celles que fournit une autre forme secondaire que je m'abstiens ici de décrire, détermine la préférence en faveur du prisme à bases rectangles, comme forme primitive. La théorie donne pour le rapport entre les dimensions de C, B (fig. 136), de la base de ce prisme, celui de $\sqrt{10}$ à $\sqrt{7}$, qui diffère peu de celui des nombres 6 et 5, et d'après ce rapport, le décroissement qui pro-



[illegible] ar une simple rangée. [illegible] exemple la variété [illegible]), et que j'ai nommée [illegible] forme est celle d'un prisme [illegible] face P perpendiculaire [illegible] obliques *c*, *c*, etc., adja- [illegible] première. Parmi les pans du [illegible] savoir, ceux qu'indiquent les [illegible] entre eux des angles de 135ᵈ, [illegible] prolonge les quatre pans M [illegible] qu'ils se rencontrent, en [illegible] on aura la surface latérale [illegible] transversale, prise par un [illegible] l'axe, sera un carré. Main- [illegible] comme primitifs les pans M, [illegible] *d* qui font avec eux des an- [illegible] seront nécessairement le résultat [illegible] une rangée sur les bords lon- [illegible] auquel appartiennent ces pans; [illegible] applique à l'hypothèse dans [illegible] les pans *d*, *d*, comme primi- [illegible] comme secondaires. D'une autre [illegible] voir que les pans *h*, *h*, si- [illegible] d'un même pan M sont égale- [illegible] me de même les deux pans [illegible] d'un même pan *d*, font [illegible] Or, cette nouvelle obser- vation prouve que chacun des deux prismes a pour coupe transversale un carré; car cette figure exige

que les décroissemens qui donnent les faces *h*, *h*, se répètent de part et d'autre de l'arête longitudinale qui sert à ces décroissemens de ligne de départ.

Maintenant, si l'on examine les faces *c*, *c*, du sommet, on observe qu'elles naissent sur des arêtes *x*, *x'*, perpendiculaires aux arêtes longitudinales *z*, *z'*, c'est-à-dire situées dans le sens des bords de la coupe transversale du prisme *d*, *d*, d'où il suit que, si l'on adopte ce prisme pour forme primitive, le décroissement qui donne les faces *c*, *c*, aura lieu sur les bords de la base. D'une autre part, ces faces étant également inclinées les unes sur les autres, il en résulte que dans l'hypothèse du prisme M, M, comme forme primitive, elles doivent naître sur les angles de la base ; et puisqu'elles font entre elles des angles égaux, les bords de la base du prisme *d*, *d*, sont identiques, et il en est de même des angles de la base du prisme M, M ; d'où l'on conclura que chacune des deux bases est un carré situé perpendiculairement à l'axe, ou parallèlement à la face P. D'ailleurs ce prisme ne peut être un cube, autrement les décroissemens qui auraient lieu dans les lames de superposition appliquées sur la face parallèle à P, différeraient de ceux qui se rapporteraient aux faces parallèles à *d*, *d*, ou à M, M, ce qui serait contraire à la loi de symétrie. La forme primitive est donc nécessairement un prisme droit à bases carrées, dont les faces latérales sont des rectangles. Le résultat de la division mécanique joint aux autres considérations fait connaître que ce prisme

duit les [illegible] I, M, et que

173. [illegible] trouve que dans d'idocra[illegible] étant, comme *idocras*[illegible] par une ran- à seize [illegible] qui lui succède à l'axe [illegible] a lieu par deux centes [illegible] qui donne les prism[illegible] sur les angles A, A lettres [illegible] entre le côté B de la d'où il [illegible] celui de sept à huit. on les [illegible] me sera fourni par masqu[illegible] connaît deux variétés d'un [illegible] (fig. 141 et 142), plan [illegible] *unitaire*, a la forme d'un tenan[illegible] deux faces *l*, *l*, qui se M, da[illegible] ique à l'axe. La seconde, gles [illegible] *aire*, ne diffère de celle-ci d'un [illegible] *s*, qui rendent le prisme gitudi[illegible] des angles droits avec les le mê[illegible] dont l'incidence est de laquel[illegible] les pans *s* d'environ 152^{d}, tifs, et [illegible]^{d}. En appliquant ici le part, [illegible] à l'égard de la variété tués d[illegible] trosulfatée que l'on voit ment i[illegible] les formes dont il s'agit *h*, *h*, s[illegible] soit au prisme M, M avec l[illegible] sale est un rhombe, vation [illegible] ent parallèles à *s*, *x*, pour c[illegible] ses côtés perpen-

diculaires entre eux, et il sera facile de voir que cette coupe est nécessairement un rectangle, et non un carré : car, dans ce dernier cas, le prisme qui dériverait du précédent, comme forme secondaire, ne pourrait devenir hexaèdre, comme celui de la fig. 141; et dans l'hypothèse où il deviendrait octogone, comme on le voit (fig. 142), tous ses pans feraient entre eux des angles de 135^{d}. Je m'abstiens de développer ces conséquences, qui s'offrent comme d'elles-mêmes. D'après tout ce qui a été dit ci-dessus, le prisme qui ferait la fonction de forme primitive ne pourra donc être que rectangulaire (fig. 143), ou rhomboïdal (fig. 144) (1). D'une autre part, la seule inspection des sommets indique que sa base est oblique à l'axe. Car, supposons pour un instant qu'il soit droit, les faces *l*, *l* (fig. 141), qui se réunissent sur une arête située obliquement, ne pourront résulter d'un décroissement ordinaire, soit sur les bords B, B, du prisme droit rectangulaire (fig. 143), soit sur les angles E, E, de la base du prisme rhomboïdal (fig. 144), puisque dans l'un et l'autre cas leur arête de jonction serait parallèle à la base, ou, ce qui revient au même, ferait un angle droit avec l'axe. Maintenant, si l'on fait attention que les arêtes ε, ε (figure 142), à la

(1) Quand même l'une et l'autre des formes prismatiques dont il s'agit ne seraient qu'hypothétiques, les conséquences du raisonnement que je fais n'en seraient pas moins fondées. Cette remarque s'étend également à toutes les autres formes dont j'ai parlé précédemment

[illegible]

[illegible] pan s, ou [illegible] motion [illegible] M (fig [illegible]) sont [illegible] contient que les [illegible]

[illegible]

C'est à la division mécanique qu'il appartient de déterminer les positions des pans de la forme primitive. Or, son résultat indique que les joints naturels latéraux sont parallèles les uns aux pans M, M (fig. 142), les autres aux pans *s*, *x*. Mais la plus grande netteté des premiers, et toutes les considérations théoriques, sont en faveur de l'adoption du prisme rhomboïdal (fig. 144) comme forme primitive. La molécule intégrante sera semblable au prisme triangulaire qui résulte de la sous-division du premier dans le sens de ses deux diagonales ; et à l'égard de la base, l'observateur était assuré d'avance qu'elle était oblique ; mais la division mécanique fait connaître qu'elle est située parallèlement à la face P (fig. 145).

J'exposerai plus loin, en parlant des dimensions des formes primitives, une propriété géométrique remarquable de celle de l'amphibole, et qui est générale pour tous les prismes rhomboïdaux obliques qui font la même fonction. Je ferai connaître l'influence de cette propriété pour donner à certaines formes secondaires un aspect qui ne fait que déguiser l'action de la loi de symétrie, sans porter aucune atteinte à cette loi.

176. Il est facile de concevoir, d'après tout ce qui vient d'être dit, comment le seul aspect des formes cristallines suffit, dans un grand nombre de cas, pour établir une distinction nette entre les espèces auxquelles ces formes appartiennent. Je vais rendre sensible, par un exemple, l'influence de ce moyen de classification.



jonction des faces l, l, [illegible] la mine
des mêmes faces et de [illegible] ode, fait
inclinées de gauche à [illegible] giste, est
lignes de départ du [illegible] fig. 146),
l, l, ont des directi [illegible] ypothèse où
sur le prisme rect [illegible] per, compo-
(fig. 144), sur le [illegible] fig. 147) peu
soit l'espèce de dé [illegible] au de cette sub-
l, l (fig. 141), la [illegible] telles que s, s, s
se répètent du [illegible] les sommets du
angles situés de [illegible] n, etc., sont si-
ou BEs (fig. 14 [illegible] des angles solides
offrir quatre f [illegible] Romé de l'Isle,
contraire de [illegible] stes, ont consi-
175. La [illegible] autre chose qu'un
même sub [illegible] es angles solides. J'a-
dont la fo [illegible] opinion, qui me
celui de la [illegible] ent, d'après le
met à trois [illegible] m'étais dispensé de
à ε, et les [illegible] Une des considé-
tions corr [illegible] à me détromper, a
ns (fig. 14 [illegible] qui naissent trois à
opposé à M [illegible] que A, et seule-
M (fig. 14 [illegible] latéraux E, E, tandis
principes [illegible] les uns et les autres
la partie [illegible] forme. Averti par
devraient [illegible] de symétrie, je
antérieur [illegible] g. 147), appar-
est obliq [illegible] oïde aigu, et

ɪes, vers un même sommet, un angle ɪes minutes. Les faces *s*, *s*, provien- ·oissement par deux rangées sur les ırs du rhomboïde primitif, lequel n'at- ıite. Quelquefois son effet est complet, ɪduit un rhomboïde très obtus, dans ience mutuelle de deux faces prises vers ımmet est de 144^d. Le décroissement qui ɪces *n*, *n*, a lieu par trois rangées sur les ıux. S'il parvenait à sa limite, il produi- ɪdécaèdre composé de deux pyramides ɪaèdres. Je donnerai, dans la partie analy- ɪémonstration de cette propriété, qui est pour tous les rhomboïdes.

ɪe terminerai par un exemple tiré d'une va- chaux sulfatée à laquelle j'ai donné le nom *ézienne*, et que représente la figure 148. On ɪne idée de sa forme, en concevant un parallé- ɪme obliquangle *abcd*, sur les côtés duquel s'é- d'une part quatre trapèzes, tels que *l*, *f*, etc., ɪe autre part quatre trapèze *l'*, *f'*, etc., inclinés même quantité en sens contraire des premiers. ɪlide est terminé par deux parallélogrammes ɪuangles, savoir, P et son opposé, parallèles à ɪ dont les côtés se confondent avec les bases des ɪèzes.

En faisant tourner ce solide à la lumière, de ma- ɪère que le rayon visuel soit dirigé vers une des ɪces P, on aperçoit à l'intérieur des lamelles sur les-

[illegible] les rayons qui ont pénétré [illegible] les réflexions se montrent [illegible] sur la face P, ce qui [illegible] cristal des joints naturels [illegible] Au défaut de cette obser- [illegible] existence des mêmes joints [illegible] qui a lieu avec une [illegible] d'indiquer:

[illegible] des trapézoïdes [illegible] analogue sur [illegible] et de son analogue [illegible] entre toutes [illegible] a pour forme [illegible], dont les [illegible]

[illegible] de symétrie [illegible] ou des [illegible], par [illegible] donne- [illegible] sur [illegible] quatre [illegible] en les [illegible] au [illegible] inclinai- [illegible] Dans [illegible] inclinaisons [illegible] deviendrait [illegible]

[illegible] qui fait la fonc- [illegible] un parallélogramme

obliquangle. Or, on peut faire ici trois hypothèses différentes, savoir, que les trapèzes résultent d'un décroissement sur les quatre bords du parallélogramme, ou d'un décroissement sur les quatre angles, ou d'un premier décroissement sur deux bords opposés, et d'un second sur deux angles pareillement opposés.

178. Le problème est aisé à résoudre au moyen de la division mécanique. Il ne s'agit que de faire dans le cristal une section parallèle à P, ce qui se fait avec une grande facilité. Soit *gosr* (fig. 149), la projection de la lame détachée par le plan diviseur, et sur laquelle les côtés *os*, *sr*, etc., répondent à ceux qui sont marqués des mêmes lettres (fig. 148). En frappant sur cette lame avec un corps dur, on y voit paraître des fissures qui se croisent, comme les lignes que présente la figure, et qui sont les naissances d'autant de joints naturels perpendiculaires à la face P. Il est visible que tous les petits parallélogrammes qui ont pour côtés les fissures dont je viens de parler, en supposant que ces côtés soient dans le rapport que j'indiquerai bientôt, représentent les bases d'autant de molécules soustractives. On voit de plus que les sous-divisions de la lame, adjacentes aux deux bords *os*, *gr*, se réduisent à de simples triangles. De là on conclura que le décroissement qui donne les trapèzes *l* (fig. 148), a lieu sur deux des angles de la base du solide primitif, tandis que celui d'où résultent les trapèzes *f* naît sur deux côtés. Si l'on sup-

pose que le décroissement sur les angles suive une loi ordinaire, comme l'indique une observation dont je parlerai dans l'instant, les lignes *os* et *gr* seront visiblement parallèles à la diagonale de la base du solide primitif vers laquelle sont tournés les angles qui subissent le décroissement. Il suit de là que chaque triangle *out*, *oxy*, etc., représente une moitié de cette base coupée dans le sens de la même diagonale. Or, si l'on mesure les trois angles d'un des triangles tel que *oxy*, on trouve à peu près $o=50^d$, $y=60^d$, $x=70^d$. De là il suit que les deux côtés *ox*, *yx*, de la base sont inégaux, en sorte que le premier est plus long que l'autre, à très peu près, dans le rapport de 13 à 12, et ainsi la base est un parallélogramme obliquangle, comme l'avait déjà indiqué la loi de symétrie. La position de ce parallélogramme, dans le cristal de la variété trapézienne, répond à celle du parallélogramme AEA′E′, dont le centre se confond avec celui du parallélogramme *gosr*.

179. Les lames de chaux sulfatée, semblables à celle dont il s'agit ici, offrent assez souvent des indices de joints naturels dans le sens de la diagonale menée de A en A′. J'ai observé aussi, dans plusieurs des mêmes lames, des couches très minces d'une matière étrangère dont les directions étaient parallèles à la même diagonale. Il suit de là que les molécules intégrantes de la chaux sulfatée sont des prismes triang[illegible] qui ont pour bases des triangles scalènes sem[illegible] à *otu*. Ces molécules réunies deux à deux com[illegible]

les molécules soustractives [illegible]
drangulaire qui fait la fonction de [illegible]

La figure 150 représente ce même [illegible]
lequel l'incidence des pans [illegible]
D'après ce qui a été dit plus haut [illegible]
ont pour expressions les nombres [illegible]
terminant la hauteur [illegible]
tions fondées sur des [illegible]
la partie analytique [illegible]
est le nombre [illegible]
qui donne les [illegible]
rangées sur les [illegible]
d'où naissent les [illegible]
rangée sur les [illegible]

On peut juger [illegible]
viens d'entrer [illegible]
symétrie peuvent [illegible]
pect d'un cristal [illegible]
fois, et qu'il s'agit de [illegible]
ristiques de l'espèce [illegible]
sa forme primitive. [illegible]
sorte d'avis [illegible]
rection qu'elle [illegible]
mination exacte [illegible]

160. Je sais qu'il existe [illegible]
faire exception à la [illegible]
d'une partie des [illegible]
Les cristaux de [illegible]
remarquables [illegible]

[illegible] partie de cet ou-
[illegible] des principes de
[illegible] des espèces miné-
[illegible] moment, à citer une
[illegible] parmi celles que pré-
[illegible] Sa forme, que l'on
[illegible] prisme qui n'a que neuf
[illegible] par *s*, *s*, etc., et les trois
[illegible] de douze qu'exigerait la
[illegible] supérieur est terminé par
[illegible] hexagones P, P, P, et trois
[illegible] sommet offre la répétition
[illegible] logues des faces *o* y sont
[illegible]

[illegible] été détournée visiblement
[illegible] de la marche qu'elle aurait
[illegible] abandonnée à elle-même.
[illegible] eue les forces électriques
[illegible] cristaux de cette substance
[illegible] attribuée la différence de
[illegible] ent les sommets de ces cris-
[illegible] temps les parties dans les-
[illegible] contraires des pôles qu'ils
[illegible] de la chaleur. On ne se-
[illegible] ici une exception à la loi
[illegible] que la loi de l'équilibre
[illegible] qu'une aiguille d'acier qui,
[illegible] dirigeait horizontalement,
[illegible] par un aimant, s'incline

ensuite vers le nord, par une de ses extrémités, après qu'on lui a communiqué le magnétisme.

181. Le dodécaèdre à plans pentagones originaire du cube (fig. 75, pl. 5) dont j'ai donné plus haut la description, s'écarte, par sa structure, de la marche ordinaire des décroissemens relatifs à cette forme primitive, mais il ne déroge réellement pas à la loi de symétrie. Tous les bords du noyau subissent l'action simultanée des mêmes décroissemens, l'un par deux rangées en largeur, l'autre en sens contraire par deux rangées en hauteur. De plus, il remplit cette condition essentielle de la loi de symétrie, qui exige que les décroissemens auxquels sont soumises les lames de superposition appliquées sur toutes les faces primitives s'assimilent entre eux, et de là vient que les parties ajoutées au noyau par l'effet des décroissemens ont exactement la même forme. Seulement l'action de chaque décroissement n'a lieu que sur deux bords d'une même face qui sont parallèles l'un à l'autre. Mais cette action est symétrique en ce que les divers décroissemens s'exercent suivant trois directions perpendiculaires entre elles, représentées par les trois arêtes terminales *pq*, *tn*, *rs*, ou, ce qui revient au même, par les trois dimensions du cube.

182. Les espèces dont la forme primitive n'est pas un des solides réguliers de la Géométrie, offrent aussi des cristaux qui sembleraient déroger à la loi de symétrie, par l'absence de quelques-unes des facettes destinées à remplacer des parties identiques. Tels

[illegible] les cristaux qui appartiennent à la [illegible] (fig. 152), et que [illegible] annulaire, parce que, dans le prisme [illegible] dont elle dérive, les six bords de [illegible] sont remplacés par des facettes *t*, *t*, dis- [illegible] milieu des six facettes, on [illegible] deux ou trois. La fig. 153 représente la variété de quartz appelée *rhombifère*, parce que les angles solides à la rencontre de ses pans et de ses faces terminales sont remplacés par de petits rhombes [illegible] au nombre de six vers chaque sommet [illegible] forme était complète; mais, communément, il en manque une grande partie. Ces sortes d'exceptions [illegible] d'autant moins au [illegible] de la chose [illegible] leurs effets sont très variables, en sorte, par exemple, que les bords de l'émeraude annulaire sur lesquels le décroissement a agi exclusivement n'ont pas les mêmes positions relatives sur les différents individus. Tantôt il y en a deux ou trois [illegible] souvent; tantôt ils sont intercalés irrégulièrement entre ceux qui se sont soustraits à la loi de symétrie. Dans tous ces cas, on doit restituer par la [illegible] les facettes qui manquent sur ces derniers, et [illegible] pour ainsi dire, aux réticences de la cristallisation, qui n'a omis ces facettes que parce qu'elles [illegible] à la cause qui tendaient à les produire. [illegible] souvent qu'une ou deux de celles qui existent [illegible] cristal sont en quelque sorte si dé- [illegible] à la vue, si la présence

des autres n'avertissait de les chercher; et ces légères ébauches, à leur tour, peuvent servir à interpréter l'absence des facettes qui manquent absolument. On pourrait comparer les anomalies apparentes dont je viens de parler, à celles qui ont lieu dans les plantes, lorsqu'une cause accidentelle a fait avorter quelques-unes des étamines dans une fleur où le nombre de ces organes est d'ailleurs déterminé par les lois auxquelles est soumise la végétation.

183. Je ne dois pas omettre d'ajouter ici un résultat d'observation qui nous montre une corrélation entre l'aspect des joints naturels, dépendant du tissu qu'ils présentent à la lumière, et le rapport de leurs dimensions. Ce résultat est lié à la loi de symétrie, en ce qu'il concourt avec la forme des cristaux à indiquer si les faces primitives dont l'œil compare les reflets sont ou ne sont pas identiques, suivant que les impressions qui en résultent sur cet organe se confondent ou sont distinguées entre elles. Ainsi, dans les rhomboïdes et dans les octaèdres extraits par la division mécanique, ou donnés immédiatement par la cristallisation, toutes les faces étant identiques ont le même éclat et le même poli, et les joints naturels qui leur correspondent s'obtiennent avec la même facilité. Dans les prismes droits ou obliques, dont les bases ont leurs côtés égaux, tels que ceux qui font la fonction de forme primitive dans la staurotide, la mésotype, l'amphibole, le pyroxène, le plomb chromaté, etc., les pans étant semblables et

égaux n'ont rien non plus qui les distingue sous le rapport des caractères dont je viens de parler. Mais les bases qui diffèrent des pans par leur figure et par leur étendue, empruntent de cette diversité un aspect particulier qui n'est plus celui des faces latérales. Enfin, si ces dernières diffèrent entre elles, comme lorsque la forme primitive est un prisme droit à bases rectangles, la différence dont il s'agit en déterminera une plus ou moins sensible dans leur degré de poli et dans les reflets qu'elles renvoient successivement à l'œil, lorsqu'on fait varier la position du prisme.

Ainsi il suffit que deux joints adjacens, sur une forme primitive obtenue par la division mécanique, présentent à l'œil des indices de deux tissus différens, pour que l'observateur soit fondé à en conclure que les facettes de molécules qui correspondent à ces joints diffèrent aussi entre elles par le rapport de leurs dimensions; et c'est même cette différence qui, en faisant varier les actions réciproques des molécules, suivant qu'elles s'attirent par tel *latus* plutôt que par tel autre, exercent son influence sur les lois de décroissemens, dont les effets laissent sur le cristal l'empreinte de la différence dont il s'agit. Je vais citer des exemples de cette corrélation, en vertu de laquelle l'inégalité d'étendue entre les facettes d'une molécule presque infiniment petite devient sensible par la diversité des impressions que font sur l'œil les rayons que ces facettes lui envoient.

184. Je reprends la forme primitive de la chaux

anhydro-sulfatée. Si l'on compare entre elles les faces M, T (fig. 136), soit sur les cristaux, soit sur les fragmens obtenus par la division mécanique, on observe que les dernières ont un éclat nacré, tandis que les autres, dont l'étendue est différente, n'ont qu'un éclat ordinaire qui tire sur le vitreux.

Je ne dirai rien ici de la chaux sulfatée, parce que j'aurai bientôt occasion d'y revenir, pour citer des observations relatives à des effets qui lui sont particuliers.

La stilbite, dont je n'ai pas encore parlé, est une des substances qui méritent le mieux de trouver ici leur place. Sa forme la plus ordinaire est celle d'un prisme rectangulaire (fig. 154, pl. 12) terminé par des sommets à quatre faces rhomboïdales qui sont tournées vers les arêtes longitudinales. Deux des pans, savoir, M et son opposé, ont le luisant de la nacre, les deux autres n'ont qu'un éclat vitreux. La même différence se montre sur les joints parallèles aux pans. On observe aussi des joints perpendiculaires à l'axe, dont l'éclat est plus faible que celui des pans T.

Ces observations suffisent pour indiquer que la forme primitive ne peut être qu'un prisme droit rectangulaire (fig. 155), dont les faces sont de trois dimensions différentes. L'aspect géométrique des cristaux s'accorde parfaitement avec cette indication. Si l'on mesure les incidences respectives des faces terminales *r*, *r*, *r'*, on trouve que celle de *r* sur *r* est sensiblement plus forte que celle de *r* sur *r'*, la première

... de $112^d \frac{1}{4}$, ce qui
... la forme primitive
... alors les faces termi-
... résultat d'un décrois-
... angles de la base,
... croissement serait inter-
... faces au lieu de quatre,
... des lignes de départ si-
... chaque angle. Mais il est
... décroissement ordinaire
... également inclinées les unes
... pas moins évident que la
... différente de celle de chacun
... à M, T. Ainsi l'aspect géo-
... ne fait autre chose que con-
... rations théoriques, ce qu'un
... une simple fracture avait déjà
... Le rapport entre les trois
... le donne la théorie, est celui
... $\sqrt{3}$, $6\sqrt{2}$, ou à peu près celui
...

... blanche est celle qu'offrent ordi-
... de stilbite. Mais on en trouve
... qui sont d'un rouge obscur,
... en Norwège, qui sont d'un
... foncé; mais l'éclat nacré persiste
... de la couleur, de même à
... ou la qualité du son qui ca-
... s'associe aux différens tons

qu'on lui fait rendre. On en peut dire autant de l'éclat vitreux des pans T qui perce à travers la couleur, quelle qu'elle soit. Dans les cristaux qui dérivent d'un prisme dont les pans sont égaux en étendue, l'éclat subsiste aussi, malgré le changement de couleur, et, de plus, il est de part et d'autre au même degré. Ainsi, dans le prisme de l'amphibole, les pans ou les joints naturels parallèles à l'axe peuvent être substitués l'un à l'autre, comme à l'insu de l'œil, qui voit des deux côtés la même vivacité de poli et d'éclat : c'est l'unisson de la lumière réfléchie.

186. Lorsque la division mécanique se fait parallèlement à des faces qui ont la même étendue, il est évident qu'elle doit être également facile de part et d'autre. Dans les corps dont les faces diffèrent par leurs dimensions, on peut dire en général que celles dont l'éclat est plus vif sont les plus petites, d'où il suit que les joints naturels qui leur correspondent sont ceux qui se prêtent le plus facilement à la division mécanique, parce que les molécules à l'aide desquelles elles exercent les unes sur les autres les attractions d'où dépend leur adhérence étant en plus petit nombre, elles doivent moins résister à leur séparation. C'est ce qui a lieu dans le prisme de la stilbite, dont les faces M, T, P, que je range ici dans l'ordre suivant lequel leur éclat va en diminuant, sont entre elles à peu près comme les nombres 6, 10, 15, qui vont au contraire en croissant.

Cependant il pourrait arriver que de deux faces

étant
exclu
aurai
nales
seme
puis
méd
en a
tuée
facil
dom
sur l
base
des p
métri
firme
coup
appris
côtés C
des qu
des no
185. l
naireme
à Fassa,
et d'autre
brun plus
au milieu
peu près q
ractérise un

acquises en étendue, surtout si leur éclat était du même genre, soit nacré, soit vitreux, la plus petite en fût douée à un moindre degré, et que les joints qui lui seraient parallèles fussent les moins faciles à obtenir : car l'assortiment des molécules élémentaires qui répondraient aux deux faces par leurs positions, n'étant pas le même, comme dans le cas d'égalité, et ces molécules exerçant les unes sur les autres des attractions différentes, à raison de leur diversité de nature, il serait possible que l'énergie de celles qui agiraient du côté des faces les moins étendues produisît une plus forte adhérence, de manière que ces faces résistassent davantage à la division mécanique. Mais cette sorte d'inversion doit avoir lieu rarement.

187. Je reviens à la chaux sulfatée, qui, parmi les substances comprises dans le cas dont j'ai parlé d'abord, est une des plus remarquables. Il est d'abord facile de voir, sans qu'il soit nécessaire d'en faire le calcul, que les côtés C, B (fig. 150) du prisme, étant dans le rapport des nombres 13 et 12, et la hauteur G ou H ayant le nombre 32 pour expression, la base P doit avoir beaucoup moins d'étendue que les faces latérales M, T. Cette différence influe d'une manière sensible sur les reflets de la lumière et sur l'adhérence des joints naturels. L'éclat de la base est beaucoup plus vif que celui des faces latérales, et la division mécanique est incomparablement plus facile dans le sens qui lui est parallèle que dans ceux qui [illegible]. La petite différence d'é-

tendue entre les faces latérales est peu sensible à l'œil; mais on la saisit avec la main lorsqu'on essaie de rompre une lame mince obtenue par la division mécanique. Si la séparation de ses deux parties tend à se faire dans le sens des bords B, B, qui sont les plus courts, on remarque qu'elle cède facilement à la flexion, et se rompt pour ainsi dire mollement, au lieu que dans le sens des deux autres bords elle oppose une certaine résistance et finit par se casser net.

Je citerai encore une expérience à l'aide de laquelle l'action de la chaleur confirme l'indication de celle de la lumière, dont j'ai parlé plus haut. Lorsqu'on expose un morceau de chaux sulfatée au feu du chalumeau, de manière que le jet de flamme soit dirigé vers les faces latérales des molécules, il y a fusion avec bouillonnement. Mais si le jet de flamme est dirigé perpendiculairement aux bases, le morceau ne fait que se calciner sans se fondre. Or, la fusion n'étant autre chose que la séparation des molécules d'un corps par l'intermède du calorique, il en résulte que, dans le premier cas, où le fluide tend à s'introduire entre les bases des molécules qui ont moins d'étendue que les pans, sa force élastique lutte avec plus d'avantage contre leur adhérence, en sorte qu'elles se séparent, c'est-à-dire que le corps se fond. C'est le contraire dans le second cas, où le calorique tend à pénétrer dans les interstices des faces latérales, qui, ayant plus d'étendue, opposent une plus grande résistance à leur séparation. Le corps éprouve seule-

ment alors une calcination qui, pour s'opérer, n'exige pas autant de chaleur que la fusion.

188. Les considérations qui viennent d'être exposées au sujet de la loi de symétrie sont si simples, qu'elles s'offrent comme d'elles-mêmes, et qu'elles ne semblent dire autre chose que ce qu'on savait d'avance. Cependant cette loi n'a pas obtenu à beaucoup près, jusqu'ici, une attention proportionnée à son importance, et a été méconnue même par les plus célèbres cristallographes. J'ai cru devoir, par cette raison, donner ici un grand développement aux résultats qui s'en déduisent, et il est même doublement heureux que des vérités si long-temps négligées, et d'une assez grande importance pour que leur connaissance méritât d'être achetée par un long travail, soient en même temps si accessibles, que la route qui y conduit n'ait besoin que d'être montrée.

De la manière dont l'accroissement se combine avec la structure.

189. On sait combien sont variables les dimensions des cristaux d'une même substance qui se sont formés à la surface de certaines pierres. Cette variation s'étend quelquefois entre des limites très éloignées, en sorte que tel cristal ne peut être distingué qu'à l'aide de la loupe, tandis que tel autre frappe l'œil par la grandeur de son volume. Cependant, si l'on examine attentivement le premier, on remar-

quera que sa forme, que nous supposons être secondaire, est aussi complète que celle de l'autre, et en remontant par la pensée à sa naissance, on doit concevoir que l'arrangement des molécules par lesquelles sa formation a commencé, représentait déjà comme en raccourci celui qui existe dans le plus volumineux, de manière que pendant tous les instans qui ont suivi il n'a fait que s'accroître en conservant la même forme. Deux ou trois exemples, choisis parmi les plus simples, suffiront pour expliquer comment l'ordre suivant lequel se fait cet accroissement se concilie avec celui que paraîtrait indiquer la série des lames décroissantes appliquées sur les différentes faces du noyau que nous obtenons par la division mécanique.

190. Je tirerai le premier exemple du dodécaèdre à plans rhombes originaire du cube. Nous devons supposer que le noyau de ce dodécaèdre, considéré dans le premier instant de la formation, ait été le plus petit qui puisse résulter de la réunion d'un nombre impair de molécules cubiques, auquel cas il devait être composé de 27 de ces molécules. Par une suite nécessaire, chacune de ses faces, telle que *eoi* (fig. 156), renfermait neuf petits carrés, qui étaient les faces extérieures d'autant de molécules; et si nous supposons six nouvelles molécules, telles que *m*, appliquées une à une sur les carrés du milieu (1), nous

(1) On s'est borné ici à la projection des molécules additionnelles qui reposent sur trois des faces du noyau cubique.

aurons l'assortiment que représente la figure, et qui déjà offre l'effet initial du décroissement par une rangée sur les bords.

Pendant l'instant suivant, de nouvelles molécules s'étant arrangées autour du dodécaèdre déjà formé, l'assortiment s'est changé en celui que l'on voit (fig. 157), où les faces du noyau devenu plus volumineux, se trouvent de niveau avec les facettes extérieures des molécules *m* (fig. 156), en sorte que ce noyau est alors un assemblage de cent vingt-cinq molécules, et que chacune de ses faces, telle que *eoi*, renferme vingt-cinq carrés. De plus, les mêmes molécules ont produit deux lames de superposition, dont l'une est composée de neuf cubes *n*, *r*, *s*, *t*, *u*, etc., et l'autre se réduit à un simple cube *m*.

En appliquant le même raisonnement à ce qui s'est passé pendant le troisième instant, et dont le résultat est représenté (fig. 158), on en conclura que le noyau se trouve alors être un assemblage de trois cent quarante-trois molécules, ce qui donne quarante-neuf carrés pour chaque face, telle que *eoi*; et que la partie correspondante de la matière enveloppante contient trois lames de superposition, composées, la première de vingt-cinq cubes, la seconde, de neuf cubes, et la dernière d'un seul cube.

Ainsi, dans le passage d'un terme au suivant, la

Il est facile d'ajouter par la pensée celles qui se sont appliquées sur les trois autres faces.

première lame de superposition s'engage, comme partie intégrante, dans le noyau qui répond à ce terme; chacune des autres lames s'accroît par l'addition d'une rangée de molécules sur chacun de ses bords, et au-dessus de celle qui était la dernière, il s'en forme une nouvelle qui en prend le nom, et qui, dans l'exemple que nous venons de citer, se réduit à un simple cube.

191. Au-delà du terme que nous avons considéré en dernier lieu, il en existe une multitude d'autres qui répondent à divers degrés successifs de l'accroissement, de manière qu'en partant du cristal naissant, les nombres des arêtes de molécule comprises dans chaque bord du noyau, ceux des carrés que renferme chacune de ses faces, et ceux des cubes dont se compose sa solidité, forment trois séries, l'une des nombres naturels impairs, en prenant trois pour le premier, la seconde des carrés de ces nombres, et la troisième de leurs cubes. J'ai décrit plus haut le dodécaèdre qui répond au terme où chaque bord du noyau est égal à dix-sept arêtes de molécule, et dont la forme est représentée (fig. 70, pl. 5).

Quoiqu'il soit impossible de connaître le nombre absolu des molécules dont tel dodécaèdre est l'assemblage, on sait du moins que ce nombre est un des termes d'une autre série, que j'ai donnée au même endroit, et de laquelle j'ai déduit une formule générale qui exprime le nombre dont il s'agit, en fonction de la quantité C par laquelle je désigne le

nombre d'arêtes de molécules contenu dans le côté du noyau.

On conçoit qu'en général les diverses circonstances qui accompagnent la cristallisation doivent faire varier les époques auxquelles les différens individus dont les molécules sont suspendues dans une même masse de liquide prennent naissance, et les durées de leurs accroissemens. Il en résulte qu'à l'instant où s'arrête la formation de chacun d'eux, ses dimensions sont renfermées entre des limites d'autant plus étroites ou plus étendues, que le terme auquel répond cet instant se rapproche ou s'éloigne davantage de celui auquel commence la série qui représente la marche progressive de l'augmentation de volume. Mais la forme reste constamment la même au milieu du contraste des dimensions.

192. Je choisirai pour second exemple le dodécaèdre à plans pentagones qui dérive aussi de la forme cubique, en vertu de deux décroissemens, l'un par deux rangées en largeur parallèlement à deux bords opposés sur chaque face du noyau, l'autre par deux rangées en hauteur parallèlement aux deux autres bords. Soit EOI (fig. 159) la face supérieure du petit noyau qui était renfermé dans le dodécaèdre naissant. Soit OI un des premiers bords, auquel cas OE sera l'un des seconds. Pour que l'effet initial des deux décroissemens ait lieu, il faudra qu'il y ait deux lames de superposition appliquées sur la face EOI, et qui soient de niveau vers le bord OE et son opposé,

tandis que vers les deux autres bords, elles se dépasseront mutuellement d'une quantité égale à deux rangées *ki*, *sr*, de molécules. Si, de plus, nous supposons que la seconde lame *mn* soit composée d'une simple rangée, pour que le nombre des molécules élémentaires soit le plus petit possible, il suffira de considérer que chaque bord du noyau, tel que OE, ne peut pas renfermer moins de neuf arêtes de molécule, dont deux répondront aux deux rangées qui restent à vide vers le bord OI, les deux suivantes à la distance entre la première lame et la seconde, la cinquième à la rangée *mn*, prise dans le sens de sa largeur, et les quatre autres aux dimensions mesurées par les quatre premières.

Par une suite de cet arrangement, le noyau sera composé de 729 molécules, la première lame de 35, et la seconde de 7. Il est, de plus, évident que chaque face du noyau renfermera 20 carrés, qui seront les facettes extérieures d'autant de molécules.

Il sera facile de se faire une idée de la marche de l'accroissement pendant les instans suivans, en appliquant ici le raisonnement que nous avons fait à l'égard du dodécaèdre à plans rhombes.

193. Il existe dans les deux variétés que nous venons de considérer, et dans plusieurs de celles qui appartiennent à diverses substances, une corrélation remarquable entre l'ordre de l'accroissement et celui de la structure. Pour concevoir en quoi elle consiste reprenons le dodécaèdre à plans rhombes représenté

nombre d' [illegible] par la
du noyau [illegible] t, de
On co[illegible] partie d'un
qui acco[illegible] par le bas
rier les [illegible] Rétablissons
dont le[illegible] même des cinq
masse [illegible] qui soit l'ana-
de leu[illegible] qui en résultera
s'arrê[illegible] indiqué par la
sont [illegible]
ou p[illegible] supposons-en
inst[illegible] même isolées de l'en-
auq[illegible] mécanique. Rétablis-
pro[illegible] appartient la lame x,
for[illegible] molécules, et rame-
tra[illegible] en plaçant sur chacune
[illegible] ce cube, et sur sa face
c[illegible] superposition analogues
c[illegible] même que celui qui ré-
d[illegible] l'accroissement du dodé-
o[illegible] figure 157.
r[illegible] de nouvelles lames, et
b[illegible] chacune d'elles, les indica-
n[illegible] aura une série de termes
So[illegible] celle qui représente les aug-
l'u[illegible] Et ainsi ce n'est pas assez de
déc[illegible] l'accroissement se concilie avec
de s[illegible] faut dire que la première se
soient [illegible]

194. Les formes secondaires susceptibles de se prêter à la même considération sont surtout celles où les lames de superposition appliquées sur les différentes faces du noyau, décroissent de manière que les parties de la matière enveloppante composées de leurs assemblages se terminent en sommet pyramidal. C'est ce qui a lieu spécialement dans le dodécaèdre métastatique, dont nous allons déterminer la forme initiale, uniquement d'après l'ordre de la structure.

Reprenons la fig. 81, pl. 6, qui représente l'effet de la loi d'où dépend la forme de ce dodécaèdre, et qui a lieu, comme nous l'avons dit, par des soustractions de deux rangées en largeur sur les bords inférieurs du rhomboïde primitif. La réunion des trois avant-dernières lames de superposition peut être considérée comme faisant partie d'un rhomboïde *d*, engagé par le bas dans la matière qui recouvre la forme primitive, et dont chaque face contient neuf petits rhombes qui sont les facettes extérieures d'autant de molécules, d'où il suit que le nombre de celles dont il est l'assemblage est de 81 (1). De plus, les trois dernières lames de superposition forment, ainsi que nous l'avons expliqué, un autre rhomboïde plus petit *h*, et évidé par la soustraction d'un des huit rhomboïdes

---

(1) Les trois lames dont nous considérons ici la réunion sont censées n'en faire qu'une, parce qu'elles sont placées à la même hauteur sur les faces du noyau situées vers un même sommet.

[illegible] complet : c'est dans [illegible] partie terminale du rhom- [illegible] ce rhomboïde, en lais- [illegible] les sept petits rhomboïdes [illegible] sommet supérieur, et supposons [illegible] la répétition du même acces- [illegible] la symétrie de la forme. Nous [illegible] du dodécaèdre naissant, dont le [illegible] rhomboïde *d*, sur lequel s'appli- [illegible] de superposition, disposées trois à [illegible] sommets, sous l'aspect de deux as- [illegible] petits rhomboïdes.

[illegible] dans le dodécaèdre le rhomboïde *f*, [illegible] noyau; chacune de ses faces pou- [illegible] 16 petits rhombes, le nombre [illegible] sera de 64. L'effet du [illegible] doublé, les trois lames qui [illegible] précédent dé- [illegible] deviendront les [illegible] appliquées sur [illegible] Les molécules du [illegible] de se partager entre les [illegible] que reculer d'un rang. [illegible] les termes suivans [illegible] d'où l'on voit que [illegible] encore ici celui de l'ac- [illegible]

[illegible] que j'ai citées comme exemples de [illegible] cet accroissement s'accorde avec la

structure, ont été choisies parmi celles qui résultent d'une seule loi de décroissement, parce que leur simplicité rend cet accord plus facile à saisir. Il est évident qu'il se soutient dans les formes produites par la combinaison de plusieurs lois simultanées de décroissement, dont l'effet initial est représenté par un petit solide composé d'un nombre de molécules qui s'éloigne plus ou moins de ceux qu'ont donnés les formes simples, à proportion que les facettes qui terminent celles dont il est l'élément sont plus ou moins diversifiées. Il nous suffit d'avoir tracé en général la route qui, dans tous les cas, conduit la cristallisation à son but, et la théorie qui suppose la chose faite, ne gagnerait rien au travail plus ou moins compliqué qu'exigerait la détermination des petits solides dont je viens de parler.

Les observations directes que l'on peut faire sur les cristaux qui appartiennent à diverses substances viennent à l'appui de tout ce que j'ai dit de la manière dont s'opère l'accroissement de ces corps. Tels sont surtout certains cristaux de quartz prismé qui ont été brisés un peu au-dessus de la base d'une de leurs pyramides. La distinction des couches concentriques qui ont contribué successivement à l'augmentation de volume, se prononce sur la surface de la fracture par les différentes teintes, les unes blanchâtres, les autres grisâtres, qui s'offrent sous un aspect rubanné semblable à celui qui fait l'ornement de certaines variétés de quartz-agathe. On trouve aussi des

[illegible] prismée dont la base [illegible] hexagones concentriques qui offrent [illegible] accroissement en épaisseur.

[illegible] terminerai par un résumé de toutes les [illegible] développées précédemment. [illegible] nature le cristal, en commençant par un embryon imperceptible à nos yeux, et dans lequel la loi de décroissement relative à la forme de ce cristal est déjà comme ébauchée, s'accroît par une superposition d'enveloppes qui, en se succédant l'une à l'autre, laissent subsister les traits de la forme originale; et dans les résultats de la théorie, le cristal est envisagé comme originaire d'un noyau dont les dimensions sont proportionnelles aux siennes, et la matière ajoutée à ce noyau est un assemblage de lames planes appliquées les unes sur les autres, et qui offrent l'effet complet de la loi dont l'existence s'annonçait déjà dans l'embryon que la cristallisation a fait naître dès le premier instant. Ainsi, l'opération de la nature a son origine au centre du cristal, et la théorie suppose qu'elle part de la surface du noyau, parce que notre esprit s'accommode d'autant mieux de cette manière de voir, que c'est d'elle que procèdent les vrais principes de la théorie, dont le but est d'appliquer notre géométrie à celle de la nature. Nous ne parcourons que la partie la plus accessible pour nous de la route que la cristallisation franchit librement tout entière. Le point essentiel est la [illegible] la théorie et la cristallisation finissent par se

rencontrer, et par se trouver d'accord l'une avec l'autre.

De la cause physique des lois de décroissement.

197. Le point de vue auquel j'ai ramené la théorie des formes cristallines est purement géométrique, et se réduit à nous les montrer comme les résultats des diverses manières dont se combinent les molécules intégrantes, en s'arrangeant symétriquement autour de la forme primitive. Mais il resterait un grand pas à faire pour remonter des lois de la structure à celles de la cristallisation, et compléter ainsi la théorie dont je viens de parler, en la considérant sous le point de vue de la Physique. On expliquerait alors comment, dans tel cas, le noyau s'accroît en conservant sa forme; comment, dans tel autre cas, les lames qui le recouvrent décroissent soit vers leurs bords, soit vers leurs angles; comment ces décroissemens suivent une marche tantôt plus lente et tantôt plus rapide, et ainsi des autres effets qui font varier les formes des cristaux.

Mais nos connaissances ne sont pas à beaucoup près assez avancées pour se prêter à la solution de ces sortes de problèmes, où il serait nécessaire d'appliquer le calcul aux lois suivant lesquelles agit l'affinité, combinées avec l'attraction du liquide environnant et avec les formes des molécules. Je me permettrai ici de hasarder une explication qui ne peut passer que pour une légère ébauche, en partant

de ce que l'observation nous laisse entrevoir des véritables données du problème, à travers l'ordre de la structure et l'action générale des causes qui en dirigent la marche.

198. Lorsque les molécules intégrantes d'un minéral, suspendues dans un liquide, tendent à se réunir pour former des cristaux, ces molécules, en même temps qu'elles sont sollicitées par leur attraction mutuelle, ont à vaincre celle du liquide qui agit pour les retenir, en sorte que la force qui opère leur réunion, est mesurée par l'excès de leur attraction mutuelle sur celle du liquide.

Or, la première de ces attractions est une force constante, puisque les molécules ne sont susceptibles d'éprouver aucun changement. Mais l'attraction que le liquide exerce sur celles-ci varie en raison de la qualité de ce liquide, de sa densité, de sa température, et autres circonstances, d'où il suit que la différence entre cette attraction et celle qui est réciproque entre les molécules, est elle-même une quantité variable; et il paraît que c'est en général à cette variation que l'on doit attribuer la diversité des formes cristallines sous lesquelles se présente une même substance minérale.

La cristallisation de la soude muriatée ou du sel [illegible], nous offre un exemple à l'appui de ce que [illegible] dire. Lorsqu'elle est dissoute dans l'eau [illegible] ses cristaux prennent la forme cubique, [illegible] primitive. Mais si l'on substitue l'u-

rine à l'eau, la forme sera celle de l'octaèdre régulier, qui résulte, comme nous l'avons vu, d'un décroissement par une rangée sur tous les angles du cube primitif.

Une autre cause de la variation dont il s'agit est l'influence des molécules étrangères suspendues dans le même liquide, et dont la force s'ajoute à celle de ce liquide, pour balancer en partie l'attraction mutuelle de la substance disposée à la cristallisation. J'ai cité, dans un autre article (1), divers exemples de cette influence.

199. Concevons maintenant des molécules que je supposerai, pour plus de simplicité, être d'une forme cubique, suspendues dans un liquide où toutes les circonstances soient favorables à la cristallisation. Imaginons que vingt-sept d'entre elles se soient déjà réunies autour d'un centre commun, pour composer un petit noyau cubique AFGLC′ (fig. 160), dont chaque face contiendra par conséquent neuf carrés. Parmi toutes les molécules environnantes qui tendent vers ce noyau, il y en aura neuf qui s'approcheront les unes des autres pour former une lame carrée, une espèce d'assise qui s'appliquera sur la face du noyau dont elle est voisine, si rien ne s'y oppose. Concevons de plus qu'étant tournées les unes vers les autres par leurs *latus* d'affinité, elles n'aient plus que de petits espaces à franchir pour prendre de l'adhérence, soit

(1) De la coïncidence des lois de décroissement.

de ce qu[illegible]
ritables d[illegible]
structure [illegible]
gent la [illegible]

198. L[illegible]
néral, su[illegible]
réunir p[illegible]
même tem[illegible]
tion mutu[illegible]
pour les [illegible]
réunion, [illegible]
mutuelle [illegible]

Or, la [illegible]
constante [illegible]
d'éprouve[illegible]
le liquide [illegible]
qualité de [illegible]
ture, et au [illegible]
rence entre [illegible]
entre les [illegible]
riable; et il [illegible]
tion que l'o[illegible]
cristallines s[illegible]
stance minér[illegible]

La cristalli[illegible]
ordinaire, no[illegible]
je viens de dire [illegible]
commune, ses [illegible]
qui est sa forme [illegible]

200. Il suit de là que l'action exercée par le liquide, pour s'opposer à la réunion des molécules des angles avec le noyau, est plus forte que celle qui a lieu à l'égard des molécules qui tendent vers le milieu des bords, et que cette dernière surpasse à son tour celle que le liquide exerce sur la molécule centrale.

Si l'attraction réciproque des molécules prévaut sur celle du liquide, quelles que soient les positions de ces molécules, le noyau s'accroîtra sans changer de forme. Mais si elle est plus faible que l'une de celles que le liquide exerce sur les molécules *ab*, *de*, il y aura un décroissement.

Représentons les diverses attractions par des nombres pris arbitrairement, et destinés seulement à aider nos conceptions. Soit l'attraction mutuelle des molécules égale à 9; celle d'un certain liquide sur la molécule centrale *pq* égale à 6; celle qui agit sur la molécule *de* et sur les autres semblablement situées égale à 8, et celle qui sollicite la molécule *ab* et ses analogues égale à 10. Les deux premières attractions 6 et 8, exercées par le liquide, étant plus faibles que l'attraction réciproque des molécules qui est 9, le liquide ne pourra empêcher la jonction soit de la molécule centrale, soit des molécules des bords avec le noyau; mais l'attraction du liquide sur les molécules des angles, qui est égale à 10, étant supérieure à l'attraction mutuelle des molécules, celles-ci, retenues par le liquide, resteront en retard, et il y aura un décroissement sur les angles.

Faisons une autre hypothèse, et continuant à exprimer par 9 l'attraction réciproque des molécules, désignons par 8 celle du liquide sur la molécule centrale, par 10 celle qu'il exerce sur une molécule de des bords, et par 12 celle qu'il exerce sur une molécule *ab* des angles. Dans ce cas, les molécules des bords étant attirées par le liquide avec une force égale à 10, celle-ci l'emportera sur l'attraction réciproque des molécules qui est égale à 9. Il y aura donc un décroissement sur les bords qui agira sur la rangée entière, parallèle à ces mêmes bords, attendu que les molécules des angles qui en font partie sont attirées encore plus fortement par le liquide.

Maintenant, si nous considérons que parmi plusieurs rangées situées les unes derrière les autres, et qui tendent vers le cristal naissant, celles de la première sont plus attirées par le centre d'action de ce cristal que celles de la seconde, et ces dernières plus que celles de la troisième rangée, nous pourrons encore entrevoir comment l'action modératrice du liquide, en se combinant avec ces différentes actions du centre, détermine des décroissemens tantôt par une rangée, tantôt par deux rangées ou davantage.

202. L'explication que je viens de donner ressemble à toutes les ébauches qui n'offrent que les premiers traits du dessin auquel se rapporte leur modèle. Inutilement tenterait-on de l'étendre à ces conflits de décroissemens, les uns directs, les autres intermédiaires, d'où naissent des facettes de différens

ordres qui exigent un œil exercé pour les démêler sur la surface de certaines variétés. Et ce que je dis ici doit en même temps nous faire sentir combien il y a loin de l'état actuel de la science à celui qui amènerait le moment où la solution du problème serait donnée par un géomètre dont l'habileté répondît à la délicatesse du sujet.

Considérations sur le tissu des faces qui terminent les formes secondaires.

Les projections géométriques que nous traçons pour représenter, par des séries de lames décroissantes disposées autour d'une forme primitive, la structure des variétés qui en dérivent (1), et les solides à l'aide desquels l'artiste met en relief ces imitations de la structure, ne font pour ainsi dire que substituer une maçonnerie grossière à l'architecture infiniment délicate de la cristallisation; mais ils ont l'avantage de rendre sensible à l'œil sa manière de travailler. Les parties extérieures des pyramides qui résultent d'un décroissement sur les bords y ressemblent à des escaliers, par les rentrées et saillies alternatives de leurs facettes latérales, et celles des pyramides produites en vertu d'un décroissement sur les angles, sont toutes hérissées d'angles solides trièdres. Mais dans l'ouvrage de la cristallisation, les lames de superposition n'ayant qu'une épaisseur presque infi-

(1) Telles sont celles que l'on voit fig. 70, 75 et 81.

niment petite, par une suite de l'extrême ténuité des molécules dont elles sont les assemblages, la distance entre leurs arêtes saillantes, dans le premier cas, s'évanouit, en sorte qu'elles paraissent se toucher, et dans le second cas, les pointes qui les terminent disparaissent de même, en sorte que, dans les résultats des deux décroissemens, les faces des pyramides se présentent sous l'aspect de plans lisses et continus.

Ce que j'ai dit du niveau apparent des faces produites par des décroissemens soit sur les bords, soit sur les angles, n'est cependant vrai qu'autant que la cristallisation n'a pas été gênée dans sa marche. Mais si son travail n'a pas atteint tout le fini dont il est susceptible, et que le décroissement ait lieu, par exemple, sur les bords, les faces du cristal pourront être sillonnées par des stries alignées dans le sens des bords des lames composantes. C'est ce qui a lieu dans la plupart des dodécaèdres rhomboïdaux qui appartiennent à la substance que j'ai nommée *aplome*, et dont les faces sont striées parallèlement à leurs petites diagonales, ainsi que cela doit être, d'après la description que j'ai donnée plus haut de ces dodécaèdres. Dans les cristaux qui appartiennent à la variété de chaux carbonatée que j'ai appelée *métastatique*, et que représentent les figures 80 et 81, pl. 5 et 6, les stries ont des directions parallèles aux bords inférieurs [illegible] IK, etc., du noyau, qui sont les lignes de dé-[illegible] décroissement par deux rangées d'où dérive [illegible] cette variété. Les décroissemens sur les

angles par une simple rangée ne sont pas susceptibles de faire naître des stries sur les faces qui en résultent; mais s'il y a deux rangées ou plus de soustraites, l'augmentation de distance entre les bords des lames de superposition donne plus de jeu à la structure pour laisser des traces de sa marche. Les stries, dans ce cas, sont parallèles aux diagonales vers lesquelles se trouvent situés les angles qui subissent le décroissement.

On a objecté contre la manière dont j'ai considéré le tissu des faces qui terminent les cristaux secondaires, que s'il en était ainsi, ces faces, chargées d'inégalités produites par les angles saillans ou les angles solides des molécules, même dans le cas où les lois de décroissement auraient joui d'une parfaite liberté, ne pourraient jamais réfléchir assez régulièrement la lumière pour faire l'office de miroirs, ce qui serait contraire à l'observation. On peut répondre que l'objection, si elle était fondée, attaquerait l'existence de toute espèce de miroir. Suivant la remarque de Newton (1), on ne peut présumer que le travail de l'art, en employant le sable et d'autres matières analogues, réussisse tellement à polir le verre, que les dernières particules de cette substance deviennent parfaitement lisses, que leurs surfaces soient exactement planes ou sphériques, qu'elles se trouvent toutes

---

(1) *Optice lucis*, *Lausannæ et Genevæ*, 1740, *lib.* 2, *pars* 3ª, *propos.* 8ª.

tournées dans le même sens, et composent une surface unique, partout semblable à elle-même. Ce qu'on appelle polir le verre n'est autre chose que rendre imperceptibles pour nos yeux les aspérités qu'ils y apercevaient et les remplacer par d'autres aspérités plus petites. Il en résulte que si la lumière était réfléchie par les parties propres du verre, elle se disperserait de tous côtés sur les surfaces polies avec le plus de soin, comme sur les plus raboteuses. C'est ce qui a fait penser à l'illustre géomètre anglais que la réflexion dépendait d'une certaine force répandue uniformément sur toute la surface du verre, et dont l'action s'exerce à une très petite distance, comme celle qui produit la réfraction. Or, on conçoit encore mieux la symétrie avec laquelle agit cette action, lorsqu'elle est secondée dans un cristal par les figures régulières des particules dont elle émane, et par la disposition pour ainsi dire compassée qui règne entre elles.

Des joints surnuméraires.

203. Lorsqu'on examine attentivement les fractures faites à un cristal, on y aperçoit quelquefois les joints qui diffèrent par leurs directions de ceux qui ont servi à déterminer les formes des molécules intégrantes. De plus, ces joints que j'appellerai désormais *joints surnuméraires,* sont toujours situés parallèlement à des faces susceptibles d'être produites par des lois de décroissemens. Je prendrai pour

exemple la chaux carbonatée dont le rhomboïde est représenté (fig. 162), parce que c'est le minéral qui a donné lieu au plus grand nombre d'observations du genre de celles dont il s'agit. On trouve en Norwège près d'Arendal, en France près de Pesé, département du Mont-Blanc, et ailleurs, de ces rhomboïdes qui offrent assez nettement des joints surnuméraires suivant trois plans, dont chacun passe par les diagonales horizontales de deux faces opposées, savoir, *bd* et *gn*, *df* et *gm*, *bf* et *mn*, et l'on concevra, avec un peu d'attention, que ces plans sont parallèles à des faces qui résulteraient d'autant de décroissemens par une rangée sur les bords supérieurs *af* et *a'm*, *ab* et *a'n*, *ad* et *a'g*, c'est-à-dire qu'ils sont parallèles aux faces du rhomboïde équiaxe originaire de celui que représente la figure. Dans d'autres rhomboïdes et quelquefois dans les mêmes, on aperçoit des joints surnuméraires situés parallèlement aux bords inférieurs *bm*, *dm*, *dn*, etc., et en même temps à l'axe, d'où il suit qu'ils sont aussi parallèles à des faces qui naîtraient d'un décroissement par une rangée sur les mêmes bords, et produiraient la surface latérale d'un prisme hexaèdre régulier. Dans les variétés secondaires, les joints surnuméraires se montrent de préférence parallèlement aux faces produites par les décroissemens d'où dépendent ces variétés, et quelques minéralogistes ont pensé que les cristaux dont les formes étaient les plus composées renfermaient des joints parallèles à toutes les différentes faces qui terminaient

[illegible] formes. Les variétés relatives à diverses autres espèces ont donné des résultats analogues.

[illegible] Avant d'aller plus loin, je remarquerai qu'en [illegible] des variations [illegible] à la facilité de les [illegible] distinctement [illegible] la symétrie, et [illegible].

[illegible] les plus remarquables [illegible] est celui que présentent [illegible] dans lesquels le [illegible] par des joints surnuméraires [illegible] ou parallèles à des [illegible] d'une rangée [illegible] sont surtout apparens [illegible] auxquels on a donné les [illegible] ils y sont ordinairement [illegible] que les joints [illegible] du rhomboïde primitif [illegible] très *sensiblement* en [illegible] dans les cristaux [illegible] *spath*, dont le tissu est très [illegible] très facilement à la division [illegible] parallèles aux faces [illegible] ne montrent que faible[illegible] dont j'ai parlé. Ces va[illegible] dans d'autres sub[illegible] que l'on doit [illegible] est vraisem-

blable que parmi ces causes une des principales est l'influence des principes colorans et autres matières étrangères. J'ai observé plusieurs fois une couche légère d'une de ces matières interposée dans un cristal transparent, et qui suivait la direction d'un joint surnuméraire.

Mais c'est surtout la multiplicité de ces sortes de joints dans les cristaux calcaires, où l'on a supposé qu'ils passaient réellement à travers les molécules adoptées par la théorie, qui a donné lieu aux objections dont on s'est prévalu pour attaquer l'existence de ces molécules, et regarder les lois d'arrangement que la théorie leur assignait comme n'étant qu'idéales.

Je vais prouver que la difficulté n'est qu'apparente, que ceux qui l'ont imaginée n'en ont pas dit assez à beaucoup près, et que néanmoins les observations qui lui ont donné naissance n'altèrent point la simplicité de la structure, et laissent subsister dans toute leur étendue les résultats de la théorie.

205. Dans l'exposé que nous faisons de certains phénomènes naturels nous employons les mots de *contact immédiat* entre les molécules des corps; nous regardons les surfaces de ces corps comme des plans continus, parce que nous sommes portés à juger des choses prises en elles-mêmes, d'après la manière dont elles s'offrent à nos observations. Mais lorsque nous réfléchissons sur la transparence des corps, nous concevons que les rayons de la lumière doivent traverser suivant toutes les directions les corps qui jouissent

ces formes. Les variétés relatives à di… trajet,
espèces ont donné des résultats analog… corps,
204. Avant d'aller plus loin, je re… entre
général les joints surnuméraires so… consi-
tions par rapport à leur nombre… toutes
apercevoir. Assez souvent on n'… L'analogie
qu'un ou deux sur trois qu'exig… opaques, re-
ainsi de ceux qui sont plus n… molécules. Les
Un des résultats d'observ… cette immense
bles parmi ceux dont il s'ag… c'est en partant
sentent les cristaux de… a prouvé que
rhomboïde primitif est tr… chimique pouvait
méraires perpendiculair… de la gravi-
faces produites par de…
autour des sommets. C… particules réfléchis-
dans les cristaux di… puissent agir sur la
noms de *saphir* et d… ent, parce que les
nairement plus n… ique considérables
naturels parallèl… yeux.
que l'on aperçoi… qui découlent des con-
éclairant les frac… rapport à la structure
appelés *corund*…), une section faite
lamelleux et s… parallèlement à l'un des
mécanique, d… ginons cet espace sous-
de la forme p… petits espaces qui soient
ment les joi… de plus qu'un certain
riations, qu… occupés par des molé-
stances miné… la même figure, et que
considérer co… tent vides. Ici, les molé-

..nière qu'entre chacune et la
..espaces vides, ce qui est bien
..ité.

..on fait passer par les points *f*, *i*,
..culaire à la surface ABCD, ce plan
.. une face produite en vertu d'un dé-
..par une rangée sur l'arête qui passe par
Car soit A′B′C′D′ (fig. 164), une section
.. ABCD (fig. 163), mais dans laquelle tous
.. espaces qui la sous-divisent soient réelle-
..occupés par les coupes d'autant de molécules.
..sons un décroissement par une rangée sur
..e contiguë au point A′. La coupe de la première
..e de superposition appliquée sur la face adjacente
l'arête A′D′ sera le rectangle de *bce*D′; celle de la suivante sera le rectangle *rnue*, celle de la troisième le rectangle *xtyu*, et ainsi des autres; d'où il suit que la face produite sera dirigée suivant A′*g*′. Or, si l'on suppose que les plans qui terminent les deux espaces cubiques soient respectivement parallèles, il est évident que A′*g*′ sera de même parallèle à *fi* (fig. 163). Il n'est pas moins clair que le plan dirigé suivant *fi* n'entamera aucune des molécules *m*, *s*, *y*, etc, et parce que dans la matière surajoutée au noyau que représente l'espace cubique B′D′ (fig. 164), par l'effet du décroissement, les vides qui restent entre les molécules voisines et entre les bords des différentes rangées successives, n'empêchent pas que les faces produites en vertu du décroissement ne nous paraissent

[illegible] *fi* (fig. 163), mis à [illegible]. pourra s'offrir sous l'as- [illegible] avec la même apparence de [illegible].

[illegible] *fi* un autre plan dont la di- [illegible] parallèle à une face située dans [illegible] (fig. 164), et produite en vertu d'un [illegible] deux rangées sur la même arête. [illegible] d'en juger par l'inspection des [illegible] *gue*, *λδyu*, qui représentent les [illegible] premières lames de superposition. Il [illegible] dans l'intérieur de l'espace indiqué [illegible], un joint naturel dirigé sui- [illegible] ne traversera aucune molécule. Un [illegible] dans le sens de *fg*, sera paral- [illegible] en vertu d'un décroissement [illegible] même arête, et en écartant [illegible] des plans paral- [illegible] d'un décrois- [illegible], et ainsi presque [illegible] difficulté est résolue avec [illegible].

[illegible] la véritable cause des [illegible]. On a prétendu [illegible] dans des directions [illegible] comme primitives. [illegible] elle un fait géné- [illegible] molécule dans laquelle [illegible] d'une substance minérale

est nécessairement une. Or, si tous les joints surnuméraires traversent, par exemple, le rhomboïde de la chaux carbonatée, le voilà morcelé et pour ainsi dire haché en un si grand nombre de fragmens de diverses figures plus ou moins irrégulières, qu'une pareille complication est l'extrême opposé à l'unité de molécule.

Un autre fait également opposé à la même opinion, c'est l'existence des stries qui sillonnent la surface d'une multitude de cristaux. Si les joints surnuméraires traversent dans tous les sens la matière propre des corps, un cristal n'est plus autre chose qu'un solide taillé par la cristallisation suivant des plans qui se confondent avec les mêmes joints. Il n'y a plus alors de décroissemens, et chaque face étant le résultat d'une coupe naturelle, doit être unie et sans inégalités, au moins du genre de celles dont il s'agit. Cependant il n'en est pas ainsi, et même les stries que l'on observe sur les cristaux sont dans le sens par lesquels les lames que j'appelle *de superposition* décroissent en perdant une ou plusieurs rangées de molécules. Ces stries ne seront, si l'on veut, que des accidens qui ont lieu dans les cas où la continuité des décroissemens a subi de petites interruptions. Mais il n'en est pas moins vrai qu'elles servent à déceler la marche de la structure, qu'elles la retracent à nos yeux d'une manière pour ainsi dire ébauchée, et qu'elles confirment l'idée d'une succession de lames disposées comme en recouvrement

co[illegible] partie fonda-
dé[illegible] cristallisation.
pe[illegible] imaginé, suivant
co[illegible] respectives seraient les
[illegible] qui lui appartien-
re[illegible] cristal en réalité n'en
le[illegible] par tout ce qui pré-
[illegible] les objections qu'a fait
[illegible] points, dont la Physique
[illegible] heureuse, et qui laisse à la
[illegible] justesse et la certitude de ses
[illegible]

[illegible] *lois de décroissement.*

[illegible] développement de la théorie
[illegible] qui précèdent, à quoi tient
[illegible] métamorphoses que produit la
[illegible] les décroissemens ont lieu à la
[illegible] du solide primitif, comme dans
[illegible] rhombes originaire du cube, ou
[illegible] comme dans l'octaèdre régulier
[illegible] noyau. Tantôt ils ont lieu seu-
[illegible] bords, comme dans la chaux car-
[illegible] ou sur certains angles, comme
[illegible] inverse qui appartient à la même
[illegible] que les résultats des lois soli-
[illegible] de tant de manières les formes
[illegible] minéral, chacun d'eux est
[illegible] se multiplier dans un rapport

considérable par la diversité de ses combinaisons binaires, ternaires, etc., avec ceux des autres lois, ce qui donne quelquefois naissance à des formes très composées, et propres à déconcerter l'œil de celui qui n'a point le secours de la théorie pour débrouiller cette complication apparente. Les deux formes, dont l'une offre le *maximum* du nombre de lois, et l'autre celui du nombre de faces observées jusqu'ici, sont celles de l'épidote dodécanome et du fer sulfuré parallélique.

La première résulte de douze lois simultanées de décroissement, et le nombre de ses faces est de quarante-quatre. La seconde a cent trente-quatre faces, produites par sept lois de décroissement. La différence dans le rapport entre le nombre des faces et celui des lois qui leur donnent naissance, provient de la loi de symétrie, qui exige la répétition des mêmes effets sur tous les bords ou sur tous les angles du cube, qui est la forme primitive du fer sulfuré, au lieu que celle de l'épidote, qui est un prisme droit irrégulier, n'ayant ses bords et ses angles identiques que quatre à quatre, cette circonstance restreint entre des limites plus étroites le nombre des faces produites même en vertu d'un concours plus nombreux de décroissemens. De là vient qu'en général les formes les plus composées existent dans des espèces dont le noyau est un des polyèdres réguliers de la Géométrie.

209. Si au milieu de cette diversité de lois tantôt solitaires, tantôt comme groupées autour d'une même

[illegible] la mesure des décroissemens variait [illegible] latitude, s'il existait, par exemple, [illegible] décroissemens par trois cents ou quatre cents rangées [illegible], l'imagination se refuserait à concevoir la multitude énorme des variétés qui pourraient naître d'une même forme primitive. Mais la cristallisation ne déroge que jusqu'à un certain terme assez peu reculé à la tendance qu'elle a en général vers la simplicité. Le plus souvent les soustractions se font par une ou deux rangées, quelquefois par trois ou par quatre, plus rarement par cinq ou par six. Si, dans certains cas, elles agissent par de plus grands nombres, ces nombres entrent dans l'expression d'un décroissement mixte, qui est toujours tel, qu'en faisant varier l'un des deux termes, ou tous les deux, d'une unité, soit en plus, soit en moins, on a l'équivalent d'un décroissement ordinaire; en sorte que ces lois peuvent être considérés comme de petites oscillations que font les lois de décroissemens, autour d'un terme moyen pris parmi les plus simples (1). [illegible] aux décroissemens intermédiaires, dans les-

---

(1) [illegible] savoir jusqu'à quel point la nature [illegible] les décroissemens auxquels sont [illegible] ordinaires, parce que nous [illegible] ce qui existe. Mais à juger de [illegible] ce qui a été observé, [illegible] dans lequel réside le [illegible] peu considérable.

quels les nombres de rangées soustraites sont quelquefois assez compliqués, on peut toujours, ainsi que je l'ai prouvé, les envisager sous un autre point de vue qui les ramène à la simplicité des décroissemens ordinaires.

210. Cependant, telle est la fécondité qui s'allie avec cette simplicité, que si l'on se borne à considérer les décroissemens les plus ordinaires par une, deux, trois et quatre rangées, soit sur les bords, soit sur les angles d'un rhomboïde, le nombre des formes que les combinaisons de ces décroissemens pris un à un, deux à deux, trois à trois, etc., seront susceptibles de produire, est de huit millions trois cent quatre-vingt-huit mille six cent quatre. Encore obtient-on ce résultat en n'ayant égard aux décroissemens en hauteur que par rapport à l'angle inférieur du rhomboïde primitif. Si l'on fait abstraction des autres, dont les cas sont très rares, on n'a plus à considérer que six espèces de décroissemens, qui, étant susceptibles chacune de 4 variations seulement, fournissent 24 quantités, auxquelles il faut en ajouter une 25ᵉ, pour le cas où le cristal secondaire a des faces parallèles à celles du noyau. Mais on doit remarquer que l'effet des décroissemens par une simple rangée sur l'angle inférieur est le même dans le sens de la largeur et dans celui de la hauteur, et que de plus il se confond avec celui du décroissement par une rangée sur les angles latéraux. Il ne reste donc plus que 23 quantités, qu'il faut combiner une à une,

[illegible] ons une
[illegible] celles qui
[illegible] rangée sur
[illegible] rangée sur les
[illegible] deux rangées
[illegible] premier décrois-
[illegible] et les deux
[illegible] peuvent exister
[illegible] concours d'un autre
[illegible].

[illegible] combinaisons une à
[illegible] quantités, est en gé-
[illegible] fait $m=23$, et que
[illegible] aura pour le nombre
[illegible] $-4=8.388.604$,
[illegible].

[illegible]

$$[illegible] \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2}b^2 + \text{etc.},$$

[illegible] du premier qui est l'unite,
[illegible] combinaisons possibles de m
[illegible] une à une, deux à deux, etc.,
[illegible] réellement distinctes. Donc
[illegible] moins l'unité, représente le
[illegible] une à une, deux à deux, etc.,
[illegible] prend pour binome la quan-
[illegible] ne sera pas distinguée de
[illegible] nombre de toutes les combi-
[illegible] $)^m-1$ ou 2^m-1.

211. On obtiendrait un résultat incomparablement plus fort, en faisant entrer dans le calcul les décroissemens dont il y a des exemples parmi ceux qui répondent aux termes suivans de la série des nombres naturels, et en y admettant les résultats des lois mixtes et intermédiaires. Au reste, il s'en faut de beaucoup sans doute que tout ce qui peut exister, même dans l'hypothèse des décroissemens les plus ordinaires, existe réellement; et ces résultats, qui ont paru effrayans à quelques personnes, n'ont pour but au contraire que de prouver la possibilité d'expliquer toutes les nouvelles formes cristallines, quelles qu'elles soient, qui pourront s'offrir un jour à nos observations.

Des signes représentatifs des Cristaux.

212. Les rapports qui servent à lier les différens cristaux originaires d'une même substance avec une forme primitive commune sont fondés, ainsi que nous l'avons vu, sur des lois de structure, dont l'effet est de déterminer le nombre et l'assortiment des plans qui composent la surface de chaque cristal. Par une suite nécessaire, le naturaliste qui s'est familiarisé avec la marche de ces lois, n'a souvent besoin que d'avoir sous les yeux la forme primitive et l'exposé des décroissemens que subissent ses angles ou ses arêtes pour se représenter le polyèdre qui en résulte, et voir en quelque sorte, par la pensée, s'opérer métamorphose du noyau dont ce polyèdre dérive.

deux à deu
à une, il y
résultent,
l'angle su
arêtes inf
sur l'angl
sement d
autres d
solitaire
décrois

Main
une, d
néral
l'on re
de to
comm

---

(1)

(a

les di
repré
quant
en se l
la som
nombr
de m
tité $1 +$
la puissan
naisons de

somme d'un coup-d'œil la diversité des détails et l'unité de l'ensemble.

213. Supposons que la fig. 165 représente un parallélépipède obliquangle dont les faces aient des angles de différentes mesures, et qui soit la forme primitive d'une espèce particulière de minéral, telle que le feld-spath (1).

Ayant adopté les voyelles pour désigner en général les angles solides, placez les quatre premières A, E, I, O, aux quatre angles de la base supérieure, en suivant l'ordre alphabétique et en même temps celui de l'écriture ordinaire, qui est de commencer par le haut et d'aller de gauche à droite; *voyez* la fig. 166, où les alignemens des lettres sont rendus sensibles à l'œil.

Ayant adopté les consonnes pour distinguer en général les arêtes, placez, d'après la même règle, les six premières B, C, D, F, G, H, sur les milieux des côtés de la base supérieure (fig. 165), et sur les deux arêtes longitudinales de la face latérale qui se présente la première, de gauche à droite.

Enfin, placez sur les milieux de la base supérieure et des deux faces latérales situées en avant, les trois lettres P, M, T, qui sont les initiales des syllabes dont est formé le mot *primitif*.

---

(1) Le parallélépipède est censé être représenté de manière que l'angle BAC, qui est le plus éloigné de l'observateur, soit un des angles obtus de la base supérieure.

Ces con [illegible] *solides, ou des six bords*
duire, da [illegible] *susceptible,* dans le cas
de l'anal [illegible] *irrégulière* du parallé-
détermin [illegible] de décroisse-
ainsi de [illegible] même parallélépipède.
mêmes [illegible] angles solides diamétra-
gner p [illegible] de voir qu'il y a
primit [illegible] composent, pris
chiffr [illegible] et *sru*; 2°. entre
subis [illegible] Il en résulte que
est t [illegible] réunissent trois à trois
rang [illegible] il n'y en a que deux
en [illegible] IAE, comme étant
cet [illegible] parallélogramme; mais l'an-
[illegible] l'angle IA*r*, et l'angle
q [illegible] les angles solides I, *s*,
f [illegible] égaux deux à deux;
l [illegible] qui forment les angles
s [illegible] AIO et AEO qui soient
a [illegible] angle solide O, étant dans un
[illegible] trouve l'angle solide A,
es [illegible] à l'égard des angles
co [illegible] angles est, relativement
un [illegible] indépendant de celui qui
con [illegible] Enfin les arètes C et D,
tive [illegible] comparées chacune à cha-
sages [illegible] dans le même cas, parce
de dist [illegible] réunissent sur l'une ne
sera par [illegible] même angle que ceux qui ont

l'autre pour ligne de jonction. C'est entre ces mêmes arêtes et celles qui leur sont diamétralement opposées, par exemple entre AI et *ps* (fig. 167), entre AE et *pu*, etc., qu'il y a égalité parfaite.

214. On voit par là pourquoi les quatre angles solides autour de la base supérieure, ainsi que les quatre bords de cette base et les deux bords longitudinaux qui se présentent en avant, sont marqués chacun d'une lettre particulière. Mais comme les lois de décroissement agissent avec la plus grande symétrie possible, du moins pour l'ordinaire, tout ce qui a lieu sur un des angles solides ou des bords désignés se répète sur l'angle ou le bord diamétralement opposé, parmi ceux qui sont restés à vide. D'après cela, il n'était nécessaire que de désigner le nombre d'angles solides ou d'arêtes qui subissent des décroissemens réellement distincts, parce que ces décroissemens renferment implicitement ceux qui ont lieu sur les angles ou les bords analogues. On voit que les indications des bords et des angles du parallélépipède sont assorties à la loi de symétrie, et le même accord se retrouvera dans les notations de toutes les autres espèces de formes primitives.

On est cependant quelquefois obligé d'indiquer aussi les angles et les bords qui sont restés à vide sur la fig. 165. Alors on se servira des petites lettres qui portent les mêmes noms que les lettres majuscules employées sur la même figure, c'est-à-dire que *p* (fig. 167) sera désigné par *a*, *sp* par *c*, *pu* par *b*, etc. Mais il ne sera

[illegible] ces petites lettres [illegible] faire entrer dans le [illegible] rapportera aisément par [illegible] place.

[illegible] des décroissemens par [illegible] davantage en largeur, [illegible] 2, 3, 4, etc., de la manière [illegible] un instant; et pour [illegible] décroissemens par deux, trois [illegible], on prendra les fractions $\frac{1}{2}$, [illegible]

[illegible] M, T, serviront à désigner soit [illegible] aucune modification, lorsqu'[illegible] seules le signe du cristal, soit [illegible] parallèles à celles du noyau, [illegible] décroissemens n'atteindraient pas [illegible] lors ces lettres seront combinées dans [illegible] cristal avec celles qui auront rapport aux [illegible] bords sur lesquels les décroissemens [illegible]

[illegible] d'abord, pour plus grande simplicité, [illegible] angles solides tels que O soit intercepté [illegible] seule facette additionnelle. Le décroissement [illegible] on rapporte la production de cette [illegible] lieu, soit sur la base P, soit sur le [illegible] à droite de l'observateur, soit sur le [illegible] gauche.

[illegible] cas, on placera le chiffre indicateur [illegible] la lettre; dans le second on donnera

nera au chiffre la place d'un exposant ordinaire, à la droite et vers le haut de la lettre; et l'on indiquera le troisième cas en plaçant le chiffre à la gauche et de même vers le haut de la lettre.

Ainsi $\overset{2}{O}$ exprimera l'effet d'un décroissement par deux rangées en largeur, parallèlement à la diagonale de la base P, qui passe par l'angle E; O^3 l'effet d'un décroissement par trois rangées en largeur, parallèlement à la diagonale de la face T, qui passe par l'angle I, et ${}^4O$ l'effet d'un décroissement par quatre rangées, parallèlement à la diagonale de la face M, qui passe par l'angle E.

Lorsque le décroissement a rapport à quelqu'un des trois autres angles solides I, A, E, l'observateur est censé tourner autour du cristal jusqu'à ce qu'il se trouve placé vis-à-vis de cet angle, comme il l'était naturellement vis-à-vis de l'angle O, dans le cas dont nous venons de parler; ou, ce qui revient au même, il est censé faire tourner le cristal jusqu'à ce que l'angle solide qu'il considère se trouve en face de lui; et c'est relativement à cette position que tel décroissement est dit avoir lieu vers la droite ou vers la gauche.

Par exemple, s'il s'agit de l'angle solide A, le signe A^2 représentera l'effet d'un décroissement par deux rangées sur la face AE*sr* (fig. 167), ou sur celle qui est opposée à T (fig. 165), et ${}^3A$ représentera l'effet d'un décroissement par trois rangées sur la face AI*ur* (fig. 167), ou sur celle qui est opposée à M

que rarement nécess [illegible]
tres sur la figure; il [illegible]
signe du cristal, par [illegible]
la pensée chacune d [illegible]

215. Pour indiqu [illegible]
une, deux, trois [illegible]
on emploiera les c [illegible]
nière qui sera exp [illegible] quelle
diquer les effets d [illegible] aux
rangees, etc., en l [illegible] par un
$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. [illegible] de la

Les trois lettres [illegible] sens ou
la forme du noyau [illegible]
qu'elles composero [illegible] par deux
les faces qui serai [illegible] ement
dans le cas où les [illegible] D ou dé-
leur limite, et alor [illegible] sur
le signe du cristal [illegible] rangées en
angles ou aux bor [illegible] par quatre
agiront. [illegible] H, etc.

216. Supposons [illegible] désigner,
cité, qu'un des ang [illegible] un décrois-
cepté par une seule [illegible] à celle qui
sement auquel on [illegible] on suppose-
facette peut avoir lie [illegible] Ainsi $\overset{a}{D}$ expri-
pan T qui est à la dro [illegible] en man-
pan M situé à sa gauch [illegible]

Dans le premier cas, [illegible] comme $\overset{a}{D}$ en
teur en dessus de la lett [illegible]

exprime un qui est ascendant sur la base supérieure P. Par la même raison c exprimerait un décroissement par trois rangées, en allant de *sp* (fig. 167) vers EO.

Si le même angle solide ou la même arête subit plusieurs décroissemens successifs du même côté, ou plusieurs décroissemens qui aient lieu de différens côtés, on répétera autant de fois la lettre indicative, en faisant varier les chiffres conformément à la diversité des décroissemens. Ainsi $\overset{2}{D}\,\underset{3}{D}$ désignera deux décroissemens sur l'arête D, l'un par deux rangées en montant sur la base P, l'autre par trois rangées en descendant sur la face M. $^{2}H\ ^{4}H$ désignera deux décroissemens, l'un par deux rangées, l'autre par quatre, à la gauche de l'arête H, etc.

S'il y a des décroissemens mixtes, on les indiquera d'après les mêmes principes, en employant les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, etc., qui les représentent, et dont le numérateur se rapporte au décroissement en largeur, et le dénominateur au décroissement en hauteur.

219. Reste à trouver une manière de représenter les décroissemens intermédiaires. Un exemple fera concevoir celle que nous avons adoptée. Soit AEOI (fig. 168) la même face que figure 165. Supposons un décroissement par une rangée de molécules doubles, suivant des lignes parallèles à *xy* (fig. 168), de manière que O*y* mesure des lignes doubles d'une arête de molécule, et O*x* des lignes simplement égales

(fig. 165). [illegible]
cette mani[illegible]
mité de la [illegible]

217. Qu[illegible]
exprimera [illegible]
la base, pa[illegible] 55).
de la lettr[illegible] [illegible]cule
tant ou en [illegible] sous-
ils se rapp[illegible]
arêtes long[illegible] énoncer
exposant p[illegible] ent être
lettre, sui[illegible] les si-
dans l'aut[illegible] *trois à*

Ainsi D [illegible] *deux*,
rangées, e[illegible] énoncera
par trois [illegible] *deux*.
croissemen[illegible] binaison de
la face M; [illegible] une forme
allant de H [illegible] déter-
rangées en a[illegible] arrangées

218. Dans [illegible] expression.
au moyen d'[illegible] il en résul-
sement sur l'a[illegible] teau que pré-
porte la lettre [illegible] se confor-
rait le cristal r[illegible] dans la
merait un décr[illegible] de com-
tant au-dessus de [illegible], et
[illegible] fent

successivement à l'œil, puis de passer aux faces du sommet ou de la pyramide. Ceci s'éclaircira par les divers exemples que nous citerons dans le cours de cet article.

Supposons maintenant que la fig. 169 représente la variété de feld-spath nommée *bibinaire*, dont la forme primitive se voit fig. 165. Dans cette variété, le pan *l* (fig. 169) résulte d'un décroissement par deux rangées sur l'arète G (fig. 165), en allant vers H; le pan M (fig. 169) répond à celui qui est marqué de la même lettre (fig 165), et qui n'est caché qu'en partie par l'effet du décroissement. Le pan T (fig. 169) est parallèle à T (fig. 165); le pentagone *x* (fig. 169) provient d'un décroissement par deux rangées sur l'angle I (fig. 165), parallèlement à la diagonale qui va de A en O; enfin, comme ce décroissement n'atteint pas non plus sa limite, le sommet porte un second pentagone P (fig. 169), parallèle à la base P (fig. 165). Toute cette description peut être traduite ainsi en cinq lettres $G^{2}MT\overset{2}{I}P$.

222. Je m'étais borné d'abord à donner les expressions pures et simples des signes indicatifs, semblables à celles qu'on vient de voir; mais j'ai senti dans la suite qu'on ne saurait prendre trop de précautions pour écarter de ce langage extrêmement concis tout ce qu'il pourrait offrir d'énigmatique, et que, dans le cas surtout où la forme était composée d'un grand nombre de facettes, ce qui entraînait nécessairement une complication proportionnelle dans l'expression

du signe, les commençans seraient embarrassés de faire le rapprochement entre l'un et l'autre. Pour obvier à cette difficulté, j'ai cru devoir placer, sous les différentes lettres qui composent le signe, celles qui leur correspondent sur la figure. Au moyen de cette addition, le signe du feld-spath bibinaire se présente comme il suit, $\underset{l}{G^{1}}\underset{M}{M}\underset{T}{T}\underset{x}{\dot{I}}\underset{P}{P}$. C'est ainsi que j'en userai dans le cours de cet ouvrage, à l'égard de toutes les formes cristallines, en joignant à chaque signe une espèce de guide qui servira à s'y retrouver, quelque compliqué qu'il puisse être.

223. Passons aux parallélépipèdes d'une forme plus régulière, et considérons d'abord les cas où ils diffèrent du rhomboïde. On supposera que chacun d'eux n'est autre chose que celui de la fig. 165, dont la forme a varié de manière à devenir plus symétrique. Par une suite de cette variation, certains angles solides ou saillans, qui étaient différens sur le premier parallélépipède, sont devenus égaux. Tout ce qui a lieu sur l'un se répète sur l'autre, et ils doivent être par conséquent marqués de la même lettre. C'est ainsi qu'en Algèbre certaines solutions générales se simplifient dans les cas particuliers, où une quantité qu'on avait d'abord supposée différente d'une autre lui devient égale.

Concevons, par exemple, que la forme primitive soit un prisme droit, qui ait pour bases des parallélogrammes obliquangles, dont un côté soit plus long

que l'autre. On aura (fig. 165) O=A, I=E, etc. On substituera donc de part et d'autre la seconde lettre à la première, comme on le voit sur la fig. 170.

En continuant de parcourir les diverses modifications du parallélépipède, on les verra passer par différens degrés de simplicité, qui détermineront de nouvelles égalités entre les lettres indicatives de leurs angles et de leurs bords, et l'on aura successivement,

Pour le prisme oblique à bases rhombes, l'expression représentée fig. 171.

Pour le prisme droit à bases rectangles, celle qu'on voit fig. 172.

Pour le prisme droit à bases rhombes, celle de la fig. 173.

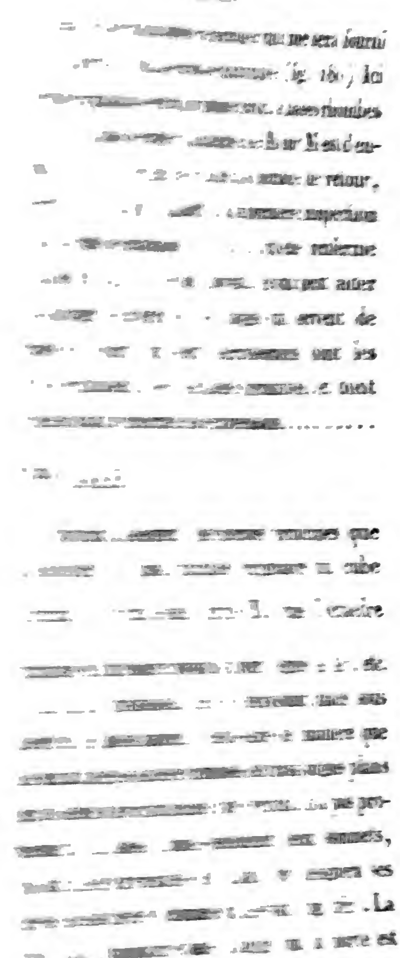
Pour le prisme droit à bases carrées, celle de la fig. 174.

Enfin, pour le cube, celle de la fig. 175. Ici l'on n'a désigné que la base supérieure par des lettres, parce que l'on peut appliquer à l'une quelconque des autres faces ce qui a lieu par rapport à cette base.

On suivra, pour toutes ces différentes formes primitives, une méthode de chiffrer analogue à celle que nous avons adoptée pour le parallélogramme obliquangle de la fig. 165, en se dispensant de répéter les lettres de même nom chiffrées de la même manière.

224. Un exemple fera concevoir cette méthode. La fig. 176 représente la variété la plus ordinaire de la cymophane, dont le noyau est un parallélépipède rectangle tel qu'on le voit fig. 172. Le signe

du signe, les
faire le rapp
obvier à cette
différentes le
leur correspo
addition, le s
comme il sui
dans le cour
formes crist
espèce de g
compliqué q
223. Pass
régulière, et
rent du rho
n'est autre
forme a vari
Par une sui
lides ou sail
parallélépip
lieu sur l'un
par conséqu
ainsi qu'en
simplifient d
qu'on avait d
lui devient ég
Concevons,
soit un prisme
logrammes obli



juscule; de sorte que si tous les angles latéraux ient leurs indications exprimées, les trois qui sont plus près du sommet supérieur porteraient la tre E; et les trois qui avoisinent le sommet inférieur, et qui sont diamétralement opposés aux premiers, auraient *e* pour lettre indicative.

Comme le rhomboïde a ses six faces égales et semblables, il n'est besoin que de considérer les décroissemens relatifs à l'une des faces, comme celle qui sur la figure porte la lettre P, parce que tous les autres ne sont que la réplique de ceux-ci. Cela posé, 1°. les décroissemens qui partent de l'angle supérieur A ou du bord supérieur B auront leur chiffre indicateur placé en dessous de la lettre A ou B; 2° ceux qui partent des angles latéraux E, auront leur chiffre situé de côté, vers le haut de la même lettre; 3°. à l'égard de ceux qui partent de l'angle inférieur *e*, ou du bord inférieur D, le chiffre destiné à les exprimer sera placé en dessus de la lettre *e* ou D.

Supposons, par exemple, que la figure 183 représente la chaux carbonatée analogique; on aura le signe suivant $\overset{2}{\underset{c}{e}}\overset{2}{\underset{r}{D}}\underset{\underset{g}{1}}{B}$, dont l'interprétation est facile, d'après les combinaisons des lettres qui indiquent les faces, avec celles qui expriment les décroissemens dont ces mêmes faces sont le résultat.

227. Il reste à faire connaître le moyen de représenter un cas particulier qui a lieu dans quelques

[illegible] à celles qui subissent [illegible] restent intactes, ou [illegible] différentes. Ce cas cou-[illegible] ...maines, et il est facile [illegible] au moyen des zéros. Par [illegible] équidifférente repré-[illegible] le noyau rhomboïdal [illegible] est ennéagone a six de ses [illegible] par des soustractions [illegible] arêtes D, D (fig. 185'); et les [illegible] par des soustractions de [illegible] sur les trois angles *e*. De [illegible] a simplement trois faces [illegible] noyau, tandis que sur le sommet [illegible] arêtes B sont remplacées chacune [illegible] fig. 184), en vertu d'un dé-[illegible] pas sa limite. Voici le signe [illegible] cette forme. $\overset{1}{D}\overset{2}{e}\overset{2}{E}\overset{0}{P}Bb$. les quan-

$s\ l\ \ P\overset{1\ 1\ .\ 0}{n}$

[illegible] connaître, l'une que les angles E [illegible] ne subissent aucun décroisse-[illegible] les arêtes opposées à B restent pa-[illegible]

[illegible] une loi différente qui don-[illegible] à des soustractions de deux [illegible] deviendrait $\overset{1}{D}\overset{2}{e}\overset{2}{E}\overset{0}{P}Bb$. D'après cela,

$\ \ \ \ \ \ \ \ 1\ 2$

[illegible] que les décroissemens re-[illegible] majuscule accompagnée d'un

chiffre quelconque, ne renfermeraient implicitement des décroissemens semblables représentés par la petite lettre de même nom, ou réciproquement, c'est-à-dire par exemple que $\underset{2}{B}$ ne renfermerait implicitement $\underset{2}{b}$, ou *vice versâ*, que quand la seconde lettre n'entrerait pas dans l'expression du signe avec un chiffre différent, ou ne porterait pas le même chiffre accompagné d'un zéro. Dans le premier cas, chacune des deux lettres exprime un décroissement qui est particulier à l'arête ou à l'angle qu'elle indique; dans le second, celle qui est affectée d'un zéro fait connaître que l'angle ou le bord auquel elle se rapporte exclusivement, ne subit aucun décroissement. Ainsi dans le signe $\overset{1}{D}\overset{2}{e}\overset{2.0}{E}P\underset{1}{B}\underset{2}{b}$, $\underset{1}{B}$ exprime un décroissement par une rangée qui n'a lieu que sur les arêtes contiguës au sommet supérieur A (fig. 185); $\underset{2}{b}$ indique un décroissement par deux rangées qui n'agit de même que sur les arêtes contiguës au sommet inférieur; enfin les quantités $\overset{2}{e}$ et $\overset{2\,0}{E}$ doivent être aussi considérées indépendamment l'une de l'autre; la première comme exprimant un décroissement par deux rangées sur les angles *e* seulement, et la seconde comme indiquant zéro de décroissement sur les angles E opposés aux précédens.

228. Je me suis étendu sur l'exposition des principes de la méthode, pour ne rien laisser à désirer, s'il était possible, de ce qui pouvait aider à en bien

concevoir l'artifice, parce qu'indépendamment des facilités qu'elle offre pour l'étude des cristaux, elle a cet avantage, qu'il suffit de connaître une forme primitive avec ses dimensions, et d'avoir sous les yeux le signe d'une des variétés qui en dérivent, pour être en état de tracer une figure exacte de cette variété, ainsi que je le ferai voir dans la suite. Le signe est comme une image théorique que la projection transforme en un véritable portrait. Mais si quelqu'un se bornait à la simple intelligence des signes qu'emploie la méthode, et ne demandait qu'à savoir les lire, sans prétendre à l'art de les écrire, il ne faudrait que quelques règles simples et faciles à saisir que nous allons exposer ici succinctement; elles formeront comme le résumé de tous les détails qui précèdent.

1°. Toute voyelle employée dans le signe d'un cristal désigne l'angle solide marqué de la même voyelle sur la figure qui représente le noyau; et toute consonne indique l'arête qui porte cette même consonne, ou la face dont elle occupe le milieu.

2°. Chaque voyelle ou chaque consonne est accompagnée d'un chiffre dont la valeur ainsi que la position indique la loi de décroissement que subit l'angle ou le bord correspondant. Il faut excepter les trois consonnes P, M, T, dont chacune, lorsqu'elle fait partie du signe d'un cristal, indique que ce cristal a des faces parallèles à celle qui porte cette même lettre.

3°. Chaque lettre comprise dans l[...] d'un cristal

est sous-entendue avec le chiffre qui l'accompagne, sur tous les angles ou tous les bords qui font la même fonction que celui qui sur la figure est marqué immédiatement de la lettre dont il s'agit.

4°. Tout nombre joint à une lettre indique un décroissement dont l'angle ou le bord marqué de cette lettre est le terme de départ. Si le nombre est entier, il indique combien il y a de rangées soustraites en largeur, avec la condition que chaque lame n'ait que l'épaisseur d'une molécule; si le nombre est fractionnaire, le numérateur fait connaître combien il y a de rangées soustraites en largeur, et le dénominateur combien il y en a de soustraites en hauteur.

5°. Suivant que le nombre est placé au-dessous ou au-dessus de la lettre qu'il accompagne, il indique que le décroissement descend (1) ou monte, en partant de l'angle ou du bord marqué de cette lettre. S'il est placé vers le haut, et à droite ou à gauche de la lettre, il désigne un décroissement qui a lieu dans le sens latéral, à droite ou à gauche de l'angle qui porte la même lettre.

6°. Lorsqu'une lettre se trouve écrite deux fois de

(1) Il ne s'agit ici que de la marche générale des décroissemens, à laquelle se rapportent les cas particuliers qui paraissent faire exception. Par exemple, si le décroissement se faisait par une rangée sur l'angle au sommet d'un rhomboïde, alors la face produite serait perpendiculaire à l'axe. Mais ce décroissement rentre dans ceux qui sont descendans, et dont il est comme la limite.

suite avec le même chiffre placé de deux côtés différens, comme $^{2}GG^{2}$, ou $G^{2\,2}G$; $^{2}AA^{2}$, ou $A^{2\,2}A$, les deux bords ou les deux angles qu'elle désigne doivent être considérés sur la figure, d'après les mêmes positions relatives, c'est-à-dire, par exemple, que dans le signe $^{2}GG^{2}$, la quantité ^{2}G indique l'effet du décroissement sur le bord G situé à gauche, et la quantité G^{2} l'effet du décroissement sur le bord situé à droite.

7°. Lorsqu'une lettre porte le même chiffre répété à droite et à gauche, comme $^{3}G^{3}$, elle s'applique indifféremment à l'une quelconque des arêtes G qu'elle désigne. Il en est de même des lettres qui appartiennent aux angles.

8°. La parenthèse telle $(\overset{3}{O}D^{1}F^{2})$, désigne un décroissement intermédiaire. La lettre $\overset{3}{O}$ exprime d'abord que le décroissement a lieu par trois rangées sur l'angle O, et que son effet est ascendant. $D^{1}F^{2}$ fait connaître que pour une arête de molécule soustraite le long du côté marqué D, il y a deux arêtes soustraites le long du côté marqué F.

9°. Toute petite lettre comprise dans le signe d'un [illegible] indique l'angle ou le bord diamétralement opposé à celui qui porte la lettre majuscule de même nom sur la figure, où la petite lettre [illegible] comme [illegible]. Il faut excepter la lettre [illegible] qui se trouve toujours employée sur la figure [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] l'angle opposé à celui qui porte la lettre E.



10°. Lorsqu'un signe renferme deux lettres de même nom, l'une majuscule, l'autre petite, avec différens chiffres, les deux bords ou les deux angles opposés auxquels répondent ces lettres, sont censés subir chacun exclusivement la loi de décroissement indiquée par le chiffre ajouté à la lettre.

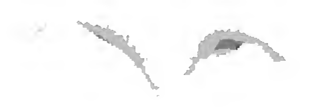
11°. Toute lettre soit majuscule, soit petite, marquée d'un chiffre qui a un zéro à sa suite, fait connaître que le décroissement indiqué par ce chiffre est nul sur l'angle ou sur le bord particulier auquel cette lettre se rapporte.

J'ai omis les applications qui seraient nécessaires pour l'intelligence de ces règles, si elles étaient présentées de premier abord, parce qu'elles se trouvent déjà dans l'exposition développée que j'ai donnée précédemment des principes de la méthode, et dont la lecture est censée avoir précédé celle de ces mêmes règles.

PARTIE ANALYTIQUE.

1. Dans l'exposé que j'ai donné précédemment de la méthode synthétique relative aux lois de la structure, je me suis borné à citer des exemples choisis parmi les variétés de parallélépipède. Telle est la relation qu'ont avec ce solide le prisme hexaèdre, le dodécaèdre rhomboïdal, l'octaèdre et le tétraèdre, que les décroissemens qui agissent sur les bords ou sur les angles de ces derniers s'assimilent à ceux que subissent les parties analogues du premier. On peut même, ainsi que nous le verrons, substituer un parallélépipède à chacun d'eux, dans les applications de la théorie, en supposant que six de ses faces, parallèles deux à deux, se prolongent jusqu'à s'entrecouper en masquant les deux autres.

La partie analytique qui va suivre doit offrir le passage de ce qui est général pour toutes les formes primitives, à ce que chacune d'elle emprunte de particulier, de son aspect géométrique, du rapport de ses dimensions et du mécanisme de sa structure. Il en résulte que ces formes doivent être considérées ici séparément, comme autant de sous-divisions du parallélépipède.



DU RHOMBOÏDE.

2. Je place la forme primitive donnée par ce solide au premier rang parmi les sous-divisions du parallélépipède comme étant la plus féconde en modifications diversifiées. Elle doit cette prérogative au rhomboïde de la chaux carbonatée. Cette substance, la plus répandue de toutes celles dont la partie connue du globe est l'assemblage, se distingue encore par l'étendue de son domaine, sous le point de vue de la cristallisation. Ses nombreuses variétés garnissent une multitude de cavités qui interrompent la continuité de ses masses. Elles s'associent aux différentes substances métalliques qui occupent les filons; elles entrent accidentellement dans la composition de plusieurs roches, depuis les plus récentes jusqu'à celles dont la formation remonte à des époques très reculées. Les observations, à mesure qu'elles se multiplient, la font reparaître sous de nouvelles transformations. La diversité semble le disputer à la profusion, et c'est avec raison qu'on l'a nommée *le Prothée des minéraux*.

Mais ce qui ajoute beaucoup à l'intérêt que présente l'étude approfondie de ses formes, ce sont les propriétés géométriques remarquables que la théorie et le calcul nous ont dévoilées dans une partie des corps auxquels elle a donné naissance, et c'est principalement cette considération qui a déterminé la préférence que j'ai donnée à ces corps, qui composent

comme l'élite des variétés du rhomboïde, pour les faire servir au développement de la théorie dont cette forme primitive est l'objet.

Avant d'exposer la méthode de déterminer les formes secondaires qui dérivent du rhomboïde, il est nécessaire d'exprimer algébriquement les lignes principales que l'on doit considérer dans cette espèce de solide.

3. La fig. 1, pl. 15, représente un rhomboïde obtus, parce que c'est le cas le plus ordinaire. Mais ce que j'en dirai s'applique également à un rhomboïde aigu.

Ayant mené les deux diagonales bf, ad, de l'un quelconque des rhombes, je désigne par g la demi-diagonale horizontale cb ou cf, et par p la demi-diagonale oblique ca ou cd.

4. Soit $adsg$ (fig. 2) la coupe principale du rhomboïde, formée par les deux diagonales obliques opposées ad, gs (fig. 1), et par les arêtes ag, ds, comprises entre ces diagonales.

Du point d je mène dr perpendiculaire sur l'axe as, et du point g je mène gn, de manière qu'étant aussi perpendiculaire sur l'axe, elle se prolonge jusqu'à la rencontre de ad. Il est clair que son prolongement tombera au milieu de ad. Car si je mène les diagonales fg et bg (fig. 1), la ligne entière gc, qui est la même que figure 2, sera couchée sur le plan bfg (fig. 1), qui passe par le point c. On conçoit aussi que la partie cn qui est une perpendiculaire menée du

centre du triangle équilatéral bfg, est la moitié de la partie gn qui va du centre à l'un des angles du même triangle. J'appellerai gn à l'avenir *la perpendiculaire sur l'axe*, et cn, *la demi-perpendiculaire sur l'axe.*

5. Il est facile maintenant d'exprimer en fonctions de g et de p, l'une quelconque des arêtes du rhomboïde, la perpendiculaire sur l'axe et cet axe lui-même.

1°. ab (fig. 1) $= \sqrt{(bc)^2 + (ac)^2} = \sqrt{g^2 + p^2}$; donc telle est l'expression de l'arête.

2°. Le côté bf du triangle équilatéral bfg étant désigné par $2g$, la ligne ng qui va du centre à l'un des angles, ou, ce qui revient au même, la perpendiculaire sur l'axe, aura pour expression $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$, d'où il suit que la demi-perpendiculaire sur l'axe est égale à $\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$.

3°. Remarquons que les perpendiculaires gn et dr (fig. 2) divisent l'axe en trois parties égales. Car les triangles semblables acn, adr, donnent $ad : ac :: ar : an$. Or, $ad = 2an$; donc, $an = nr$. De plus, les triangles dsr, gan, étant semblables et égaux, on a $rs = an$; donc, $an = nr = rs$.

Maintenant $an = \sqrt{(ac)^2 - (cn)^2} = \sqrt{p^2 - \frac{1}{3}g^2}$; donc en triplant cette expression, on aura (1).

$$as = 3\sqrt{p^2 - \frac{1}{3}g^2} = \sqrt{9p^2 - \frac{9}{3}g^2} = \sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

---

(1) Il sera bon de retenir cette expression de l'axe, ainsi que

6. Proposons-nous encore, avant d'aller plus loin, de résoudre le problème suivant. Etant donné les deux demi-diagonales g et p, déterminer d'une manière générale trois espèces d'angles, savoir, les angles plans du rhomboïde, les incidences respectives de ses faces ou les angles de sa coupe transversale, et enfin ceux de sa coupe principale.

1°. Pour les angles plans, soit mené *am* (fig. 1), perpendiculaire sur *df*, et qui sera le sinus de l'angle *afd*, en considérant *af* comme le rayon. Cherchons le rapport entre *af* et le cosinus *mf*.

Nous avons déjà $af = \sqrt{g^2 + p^2}$.

De plus, $am = \frac{bf \times ac}{df} = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}}$.

Donc

$$af : am :: g^2 + p^2 : 2gp; \text{ mais } mf = \sqrt{af^2 - am^2}.$$

Donc

$$af : mf :: g^2 + p^2 : \sqrt{(g^2+p^2)^2 - 4g^2p^2} :: g^2 + p^2$$
$$: \sqrt{g^4 - 2g^2p^2 + p^4} :: g^2 + p^2 : \pm g^2 \mp p^2,$$

les signes supérieurs du dernier terme appartenant au cas où le rhomboïde est obtus, et les signes inférieurs à celui où le rhomboïde est aigu.

---

celle de l'arête qui est $\sqrt{g^2 + p^2}$, et celle de la perpendiculaire sur l'axe, savoir $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$, parce que comme ces expressions reviendront à chaque instant dans l'exposé de la théorie, nous nous dispenserons d'y mettre des numéros de renvoi.

Le résultat précédent nous offre une propriété remarquable du rhomboïde. Elle consiste en ce que dans cette espèce de solide le cosinus du petit angle plan est toujours une quantité rationnelle, pourvu que les carrés des expressions des deux diagonales soient eux-mêmes des quantités rationnelles.

2°. Pour les incidences mutuelles des faces, par exemple, pour celle de *abdf* sur *dfqs*.

Soit *amhl* (fig. 3) la coupe transversale du rhomboïde, menée par la ligne *am* (fig. 1). Cherchons d'abord le rapport entre les demi-diagonales *mr* et *ar* (fig. 3). Soit $mr = g'$, et $ar = p'$. Nous aurons,

$$(am)^2 \text{ ou } g'^2 + p'^2 = \frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}, \text{ et } g'^2 = g^2;$$

donc

$$p'^2 = \frac{4g^2p^2}{g^2+p^2} - g^2 = \frac{4g^2p^2 - g^4 - g^2p^2}{g^2+p^2} = \frac{3g^2p^2 - g^4}{g^2+p^2};$$

donc

$$g' : p' :: g : \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{g^2+p^2}} :: \sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{3p^2 - g^2}.$$

Et parce que $\sqrt{3p^2 - g^2} = \sqrt{9p^2 - 3g^2} \times \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, il en résulte que le rapport entre les demi-diagonales *mr* et *ar* est le même que celui du côté du rhomboïde au produit de l'axe par $\sqrt{\tfrac{1}{3}}$.

Il est évident que si g^2 et p^2 sont rationnels, g'^2 et p'^2 le seront de même. Cela posé, ayant mené *az* perpendiculaire sur *mh*, déterminons en fonctions de *g* et de *p* le rapport entre *am* pris pour sinus

total et le cosinus mz de l'angle amh qui mesure la plus petite incidence des faces du rhomboïde. Ce rapport en fonctions de g' et de p' est celui de $g'^2+p'^2$ à $g'^2-p'^2$. Or, d'après la proportion trouvée ci-dessus,

$$g'^2+p'^2:g'^2-p'^2::g^2+p^2+3p^2-g^2:g^2+p^2$$
$$-3p^2+g^2::4p^2:2g^2-2p^2::2p^2:g^2-p^2.$$

Si le rhomboïde était aigu, on aurait

$$g'^2+p'^2:p'^2-g'^2::2p^2:p^2-g^2\ (1).$$

On voit ici que la propriété relative à l'expression du cosinus sous une forme rationnelle, qui a lieu pour les angles plans, s'étend à ceux qui mesurent les incidences des faces.

3°. Pour les angles de la coupe principale, ak (fig. 2) sera le sinus de l'angle aigu g, en prenant ag pour le rayon. Or,

$$ak=\frac{gn\times as}{gs}=\frac{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}\times\sqrt{9p^2-3g^2}}{2p}=\frac{\sqrt{3g^2p^2-g^4}}{p}.$$

$$kg=\sqrt{(ag)^2-(ak)^2}=\sqrt{g^2+p^2-\frac{3g^2p^2-g^4}{p^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{g^4-2g^2p^2+p^4}}{d}=\frac{\pm g^2\mp p^2}{p}.$$

Donc $ak:kg::\sqrt{3g^2p^2-g^4}:\pm g^2\pm p^2$.

---

(1) Dans le cas du rhomboïde aigu, le sinus az se rejetera en dehors du rhomboïde, en conséquence de l'angle obtus que feront alors les deux faces $abdf$, $dfqs$ (fig. 1), et l'on aura le supplément de cet angle, c'est-à-dire, l'incidence des faces à l'endroit des arêtes contiguës au sommet.



Dans le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, on a $g=\sqrt{3}$, $p=\sqrt{2}$. Substituant ces valeurs à la place de g et de p, dans les rapports précédens, on trouve

1°. $af : mf$ (fig. 1) :: 5 : 1, ce qui donne....... $fam = 11^d 32' 13''$; donc $baf = 101^d 32' 15''$.

2°. $am : mz : 4 : 1$, ce qui donne pour l'angle amz, $75^d 31' 28''$.

3°. $ak : kg$ (fig. 2) :: 3 : 1, ce qui donne pour l'angle ags, $71^d 33' 54''$.

7. Je terminerai cet article par la solution de trois problèmes relatifs au rhomboïde, dont les sujets existent parmi les résultats de la cristallisation.

1°. Trouver le rapport entre g et p, dans le rhomboïde qui a cette propriété, que quand son axe est vertical, chacune de ses faces est également inclinée par rapport à un plan vertical et à un plan horizontal.

Soit $adsg$ (fig. 2) la coupe principale. Le triangle anc étant isocèle, on aura $cn=an$; et

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}=\tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}=\sqrt{p^2-\tfrac{1}{3}g^2}, \text{ ou } s^2=3p^2-g^2.$$

Donc $2g^2=3p^2$, et $g^2 : p :: \sqrt{3} : \sqrt{2}$, comme dans la chaux carbonatée.

2°. Trouver le rapport entre g et p dans le rhomboïde dont la coupe principale est un *maximum*, en supposant p constant.

Soit x la demi-diagonale horizontale. La surface

de la coupe principale sera

$$gn.as=\sqrt{\tfrac{4}{3}x^2}.\sqrt{9p^2-3x^2}=\sqrt{12p^2x^2-4x^4}.$$

Je prends la différentielle de cette quantité.

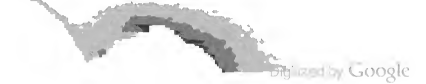
$$d.\sqrt{12p^2x^2-4x^4}=d.(12p^2x^2-4x^4)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}(12p^2x^2-4x^4)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times(24p^2x.dx-16x^3dx)=\frac{12p^2xdx-8x^3dx}{(12p^2x^2-4x^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dans le cas du *maximum*, cette différentielle doit être nulle; donc $12p^2xdx-8x^3dx=0$; ou

$$12p^2xdx=8x^3dx,\ \text{et}\ 3p^2=2x^2.$$

D'où l'on tire $x:p::\sqrt{3}:\sqrt{2}$, comme dans la chaux carbonatée.

On peut démontrer ce *maximum* par la Géométrie simple. Car, le triangle *adr* étant les $\frac{2}{3}$ du triangle *ads*, à cause de la hauteur commune *dr*, et de.... $ar=\frac{2}{3}as$, sera par conséquent le tiers de la coupe principale *adsg*; donc il devra être aussi un *maximum*. Or, ce triangle étant nécessairement rectangle en *r*, et sa base *ad* étant une constante, la question se réduit à trouver, parmi tous les triangles rectangles qui ont une base commune, celui dont la surface est un *maximum*. Or, si l'on suppose que la base soit le diamètre *mn* (fig. 4) d'un cercle, il est évident que parmi tous les triangles rectangles *mf'n*, *mfn*, etc., que l'on peut construire sur cette base, celui qui donne le *maximum* est le triangle isocèle *mfn*; donc le triangle *ard* (fig. 2) sera aussi un



triangle isocèle, d'où il est facile de conclure, comme on l'a vu précédemment, que $g : p :: \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

3°. trouver le rapport entre g et p dans le rhomboïde dont la solidité est un *maximum*, en supposant p constant.

La perpendiculaire ak (fig. 2) pouvant être prise pour la hauteur du rhomboïde, la solidité de celui-ci sera égale à $ak \times 2gp$. Or,

$$ak = \frac{gn \times as}{ad} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}g^2 - (9p^2 - 3g^2)}{4p^2}};$$

et faisant $g = x$, puis exécutant la multiplication indiquée, $ak = \sqrt{\frac{12p^2x^2 - 4x^4}{4p^2}}$. Donc la solidité sera

$$2px\sqrt{\frac{12p^2x^2 - 4x^4}{4p^2}} = \sqrt{12p^2x^4 - 4x^6},$$

quantité dont la différentielle est

$$\tfrac{1}{2}(12p^2x^4 - 4x^6)^{-\frac{1}{2}} . d(12p^2x^4 - 4x^6) = \tfrac{1}{2}(12p^2x^4 - 4x^6)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times (48p^2x^3dx - 24x^5dx) = \frac{24p^2x^3dx - 12x^5dx}{\sqrt{12p^2x^4 - 4x^6}},$$

Égalant cette différentielle à zéro, on a

$$24p^2x^3dx - 12x^5dx = 0.$$

D'où l'on tire $2p^2 = x^2$, et $x : p :: \sqrt{2} : 1$, ce qui a lieu dans le rhomboïde donné par la sous-division du dodécaèdre rhomboïdal, ainsi que nous le verrons dans la suite.

8. Je passe aux résultats des différentes lois de décroissement que le rhomboïde est susceptible d'offrir.

Il y a, en général, cinq espèces de décroissemens possibles, qui donneront des formes secondaires; savoir,

Un décroissement sur les bords supérieurs *ab*, *af*;
Un second sur l'angle supérieur *a*;
Un troisième sur les bords inférieurs *db*, *df*;
Un quatrième sur les angles latéraux *b*, *f*;
Un cinquième sur l'angle inférieur *d*.

De plus, les décroissemens sur les angles peuvent avoir lieu ou par des lois ordinaires, ou par des lois intermédiaires. Nous examinerons successivement ces différens cas, en commençant par les plus simples.

I. DES LOIS ORDINAIRES DE DÉCROISSEMENT RELATIVES AU RHOMBOÏDE.

1. *Décroissemens sur les bords supérieurs.*

9. Ces décroissemens donneront en général des dodécaèdres à faces triangulaires, dont trois arêtes prises alternativement coïncideront avec les arêtes *ab*, *af*, *ag*, etc., du noyau (fig. 1), et les autres s'élèveront au-dessus des diagonales obliques *ad*, *aq*, etc. De plus, il est évident que l'axe sera le même que celui du noyau.

Soit *adsg* (fig. 5) la coupe principale de ce noyau, *am* l'arête du cristal secondaire qui s'élève au-dessus de la diagonale *ad*, et doit nécessairement être sur le plan qui passe par *a*, *d*, *s*; *sm* l'arête inférieure correspondante, qui coïncide avec le bord *sd* du



rhomboïde primitif. Soit *azt* le triangle mensurateur que nous considérons ici comme si les décroissemens se faisaient sur l'angle *a*, en observant qu'à une rangée de soustraite vers les bords *ab*, *af* (fig. 1), répond une diagonale oblique de molécule, qui mesure la quantité dont une lame de superposition dépasse l'autre.

Commençons par déterminer le rapport entre les côtés *az* et *tz* de ce triangle. Soit *a* l'arête d'une molécule, et *p'* sa demi-diagonale oblique. Nous aurons, en nommant *n* le nombre de diagonales soustraites,

$$az : tz :: 2p' \times n : a;$$

et parce que les dimensions de la molécule sont proportionnelles à celles du noyau,

$$az : tz :: 2np : \sqrt{g^2 + p^2}.$$

Déterminons aussi le rapport entre *mu*, perpendiculaire sur l'axe relative au dodécaèdre secondaire, et la partie *au* de l'axe comprise entre le sommet et cette perpendiculaire.

1°. Pour *mu*. Les triangles semblables *msu*, *dsr*, donnent, *ds* : *dr* :: *sm* : *mu*. Or,

$$ds = \sqrt{g^2 + p^2},\ dr = \sqrt{\tfrac{4}{3} g^2};$$

reste à chercher *sm*, ou seulement sa partie *dm*, puisque l'autre est connue.

Les triangles semblables *azt*, *adm*, donnent

$$az : tz :: ad : dm.$$

Ou,

$$2np:\sqrt{g^2+p^2}::2p:dm=\frac{1}{n}\sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc

$$sm=\sqrt{g^2+p^2}+\frac{1}{n}\sqrt{g^2+p^2}=\frac{n+1}{n}\sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc la proportion $ds:dr::sm:mu$ devient

$$\sqrt{g^2+p^2}:\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}::\frac{n+1}{n}\sqrt{g^2+p^2}:mu=\frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

2°. Pour *au*. Cherchons *su* que nous retrancherons de *sa*.

$$ds:rs::sm:su;$$

ou

$$\sqrt{g^2+p^2}:\tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}::\frac{n+1}{n}\sqrt{g^2+p^2}:su=\frac{n+1}{3n}\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Donc

$$au=\sqrt{9p^2-3g^2}-\left(\frac{n+1}{3n}\right)\sqrt{9p^2-3g^2}=\frac{2n-1}{3n}\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Donc $mu:au::(n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}$.

10. Soient maintenant *b'am*, *f'am* (fig. 6) deux faces voisines situées vers le sommet supérieur du dodécaèdre secondaire, et tellement choisies, que les arêtes *ab'*, *af''* se confondent avec celles qui sont marquées des mêmes lettres (fig. 1), auquel cas l'arête *am* (fig. 6), sera celle qui s'élève au-dessus de la diagonale *ad* (fig. 1).

Etant donné les demi-diagonales *g* et *p* du noyau, avec la quantité *n* des décroissemens, proposons-nous de déterminer l'incidence de *b'am* (fig. 6) sur *f'am*,



et celle de $b'am$ sur la face qui lui est adjacente de l'autre côté de ab'.

Concevons un plan $b'yf'$, qui soit perpendiculaire sur l'axe ao. Menons $b'o$, $f'o$, yo, qui coïncident avec ce même plan ; menons ensuite $f'r$ et $f'p$ perpendiculaires l'une sur yo, l'autre sur ay, et joignons les points p, r, par une droite. L'angle $f'pr$ sera la moitié de celui qui donne l'incidence de $b'ay$ sur $f'ay$ (1). D'une autre part menons ye, yh perpendiculaires l'une sur $b'o$, l'autre sur ab', puis joignons les points e, h, par une droite. L'angle yhe sera la moitié de celui qui mesure l'incidence de $b'ay$ sur la face adjacente à ab' (2). On aura donc les deux incidences proposées, en cherchant le rapport entre le sinus $f'r$ et le cosinus pr de l'angle $f'pr$, et le rapport entre le sinus ye et le cosinus eh de l'angle yhe.

---

(1) Si l'on conçoit une ligne menée de b' en p, elle sera perpendiculaire sur ay, ainsi que $f'p$, puisque tout est égal de part et d'autre. Donc ap étant elle-même perpendiculaire tant sur $b'p$ que sur $f'p$, l'est aussi sur le plan $b'pf'$, et par conséquent sur le plan $f'pr$ qui se confond avec le précédent, puisque $f'r$ prolongée irait tomber en b'. Donc pr qui passe par le pied de ap sera perpendiculaire sur elle. Donc puisque $f'p$ l'est aussi sur ap, l'angle $f'pr$ sera égal à l'incidence de $f'ay$ sur ayo, c'est-à-dire, à la moitié de l'incidence $b'ay$ sur $f'ay$.

(2) Cela se prouve par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait dans la note précédente, relativement à l'angle $b'pr$. Nous aurons souvent occasion d'employer des constructions de ce genre.

Ayant prolongé gn (fig. 5) jusqu'à la rencontre de am, nous pouvons supposer, pour plus de simplicité, que le plan $b'yf'o$ (fig. 6) soit à la même hauteur que gx (fig 5), en sorte que l'on ait ao (fig. 6) $= an$ (fig. 5); dans ce cas, on aura aussi $f'o$ ou $b'o$ (fig. 6) $= gn$ (fig. 5), et yo (fig. 6) $= nx$ (fig 5).

Cherchons séparément $f'r$ et pr.

1°. Pour $f'r$. Il est évident que cette ligne est la moitié de celle qui joindrait les points b', f', et puisque ces points sont censés être la même hauteur que gx, ils coïncident avec les points b, f (fig. 1), d'où il suit que $f'r$ (fig. 6) $= fc$ (fig. 1) $= g$.

2°. Pour pr. Les triangles aoy, rpy (fig. 6) sont semblables, d'après leur position respective jointe à l'égalité des angles aoy et rpy qui sont droits tous les deux. Donc, $ay : ao :: yr : pr$.

Cherchons successivement ay, ao et yr.

$$ay = \sqrt{(yo)^2 + (ao)^2}. \quad yo = nx \text{ (fig. 11)}.$$

$$au : mu :: an : nx.$$

Ou

$$\frac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2} : (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}$$

$$: nx = \frac{n+1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = yo \text{ (fig. 6)}.$$

$ao = \frac{1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}$. Désignons par a, pour plus de simplicité, la valeur de l'axe, $\sqrt{9p^2-3g^2}$. Nous aurons $ay = \sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \frac{4}{3}g^2 + \frac{1}{9}a^2}$. nous venons de

trouver ao, qui était la seconde des quantités à chercher. Reste yr.

L'angle $f'or$ étant de 60^d, et l'angle $f'ro$ de 90^d,

$$or = \tfrac{1}{2}f'o = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}. \quad yr = yo - or = \frac{n+1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$

$$= \frac{3}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}.$$

Donc la proportion $ay : ao :: yr : pr$ devient

$$\sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2 + \tfrac{1}{9}a^2} : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2} :: \frac{3}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : pr$$

$$= \frac{\frac{1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2g^2}}{\sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2 + \tfrac{1}{9}a^2}}.$$

Donc $$f'r : pr :: g : \frac{\frac{1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2g^2}}{\sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2 + \tfrac{1}{9}a^2}}$$

$$:: \sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2 + \tfrac{1}{9}a^2} : \frac{1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}$$

$$:: \sqrt{(n+1)^2 4g^2 + (2n-1)^2 \tfrac{1}{3}a^2} : a.$$

Passons au rapport entre le sinus ye et le cosinus eh de l'angle yhe.

1°. Pour ye. Nous avons

$$ye = \sqrt{(yo)^2 - (oe)^2}. \quad (yo)^2 = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2,$$

d'après le calcul précédent. De plus, à cause de

$$eoy = 60^d \text{ et } yeo = 90^d,\ oe = \tfrac{1}{2}yo.$$

Donc $ye=\sqrt{\frac{3}{4}\,\overline{yo}^2}=\sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 g^2}$.

2°. Pour *eh*. Les triangles semblables *b'oa*, *b'he* donnent, $ab':ao::b'e:eh$.

$$ab'=\sqrt{(b'o)^2+(ao)^2}=\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2+\tfrac{1}{9}a^2}.$$
$$ao=\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2}.\quad b'e=b'o-oe=\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$
$$-\left(\frac{n+1}{4n-2}\right)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}=\left[1-\left(\frac{n+1}{4n-2}\right)\right]\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$
$$=\frac{3n-3}{4n-2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Donc la proportion $ab' : ao :: b'e : eh$ devient,

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2+\tfrac{1}{9}a^2} : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2} :: \frac{3n-3}{4n-2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : eh.$$

$$eh=\frac{\frac{3n-3}{4n-2}\sqrt{\frac{4}{27}a^2g^2}}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2+\frac{1}{9}a^2}}=\frac{\frac{n-1}{2n-1}\sqrt{\frac{1}{3}a^2g^2}}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2+\frac{1}{9}a^2}}$$
$$=\frac{n-1}{2n-1}\sqrt{\frac{3a^2g^2}{12g^2+a^2}}.$$

Donc

$$ye : eh :: \sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 g^2} : \frac{n-1}{2n-1}\sqrt{\frac{3a^2g^4}{12g^4+a^2}}$$
$$:: n+1 : (n-1)\sqrt{\frac{3a^2}{12g^2+a^2}} :: (n+1)\sqrt{12g^2+a^2}$$
$$:(n-1)\sqrt{3a^2} :: (n+1)\sqrt{12g^2+9p^2-3g^2}$$
$$:(n-1)\sqrt{27p^2-9g^2} :: (n+1)\sqrt{g^2+p^2}$$
$$:(n-1)\sqrt{3p^2-g^2}.$$

11. Parmi les variétés de la chaux carbonatée, il

en existe plusieurs que je ferai connaître dans la suite, et qui offrent, vers chaque sommet, six facettes produites en vertu d'un décroissement par trois rangées sur les bords supérieurs du noyau. Mais ces facettes se combinent avec d'autres qui sont dues à des lois différentes de décroissement. Pour appliquer les formules précédentes aux facettes dont il s'agit, il faut faire $n=3$, $g=\sqrt{3}$, $p=\sqrt{2}$.

En substituant ces valeurs, on trouvera,

1°. $f'r : pr :: \sqrt{89} : \sqrt{3}$, ce qui donne $79^d 35' 47''$ pour l'angle $f'pr$, et $159^d 11' 34''$ pour l'incidence de $b'am$ sur $f'am$.

2°. $ye : eh :: \sqrt{20} : \sqrt{3}$, ce qui donne $68^d 49' 43''$ pour l'angle yhe, et $137^d 39' 26''$ pour l'incidence de $b'am$ sur la face adjacente à ab'.

12. Cherchons s'il y a une loi possible de décroissement pour le dodécaèdre à triangles isocèles, ou composé de deux pyramides droites réunies base à base. Dans ce cas, $yo=b'o$. Donc aussi nx (fig. 5) $=gn$, ou bien

$$\frac{n+1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}=\sqrt{\tfrac{4}{4}g^2}.$$

(*Voyez* 10, 2°). Ce qui donne $n=2$. Donc la chose est possible, en vertu d'un décroissement par deux rangées.

A l'époque où j'ai publié la première édition de mon Traité, je n'avais pas encore rencontré ce cas dans la nature; mais des variétés de chaux carbonatée que j'ai observées depuis en offrent des exemples,

entre autres celle que j'appelle *sténonome*, et sur laquelle je reviendrai à l'article des formes secondaires composées.

13. A mesure que l'arête *am* se relève par son extrémité inférieure, en faisant des angles toujours plus ouverts avec l'axe *ao* (fig. 6), l'angle que fait *b'am* avec la face adjacente à *ab'* va lui-même toujours en augmentant, et il y a un terme où ces faces se trouvent sur un même plan. Le cristal secondaire devient alors un rhomboïde, dont les diagonales obliques se confondent avec les arêtes *ab'*, *af'*, etc.

Pour trouver la loi qui donne ce rhomboïde, j'observe que dans le cas où il a lieu, le cosinus *eh* s'évanouit. Donc (10) alors $\frac{n-1}{2n-1}\sqrt{\frac{3a^2g^2}{12g^2+a^2}}=0$; ou simplement $n-1=0$. Donc $n=1$, ce qui est d'ailleurs évident, d'après ce qui a été dit plus haut.

Déterminons les deux demi-diagonales du rhomboïde dont il s'agit; soient g' et p' ces deux lignes. *sm* (fig. 5) étant la diagonale oblique du rhomboïde, *mu* sera la perpendiculaire sur l'axe. Donc

$$mu=\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}.$$

Mais (9, 1°.) d'une autre part,

$$mu=\frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}=2\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}. \text{ Donc } g'=2g.$$

Remarquons maintenant que dans le même cas la ligne *mu* est relevée de manière qu'elle se trouve sur la direction de *gn*. C'est une suite nécessaire de ce



que sm est la diagonale oblique. Donc alors $su=2sr$, et $sm=2sd$. Donc $2p'=2\sqrt{g^2+p^2}$, ou $p'=\sqrt{g^2+p^2}$. C'est-à-dire que la demi-diagonale horizontale g' est double de celle du noyau, et que la demi-diagonale oblique p' est égale à l'arête du noyau.

Ce cas existe dans plusieurs espèces de substances minérales. Mais jusqu'à présent la chaux carbonatée est la seule qui l'ait offert sans mélange d'aucunes facettes produites par d'autres lois de décroissement. J'ai développé plus haut (pag. 100), à l'aide de la synthèse, la structure de la variété qui s'y rapporte, et que je nomme *équiaxe*. Ici $g=\sqrt{3}$, $p\sqrt{2}$, donc $g'=\sqrt{12}$, et $p'=\sqrt{5}$, ce qui donne pour l'angle obtus de chaque rhombe, 114^d 18′56″; pour l'angle aigu, 65^d 41′ 4″; pour la plus grande incidence des faces, 134^d 25′ 38″; pour la plus petite, 45^d 34′ 22″; pour les angles de la coupe principale, 139^d 23′ 52″ et 40^d 36′ 8″.

14. Concevons maintenant une suite de rhomboïdes qui aient de telles dimensions, que chacun soit susceptible d'être produit par le suivant considéré comme noyau, en vertu de cette même loi qui a pour expression $\underset{1}{B}$. Si nous désignons par g et p les demi-diagonales de l'un d'eux, qui soit compris entre les extrêmes, et que nous appellerons *générateur*, nous aurons deux séries, l'une descendante, composée des rhomboïdes plus petits que le générateur, l'autre ascendante, composée de ceux qui le

surpassent en volume. Déterminons généralement en fonctions de g et p les demi-diagonales de l'un quelconque des autres rhomboïdes compris dans chaque série, le rang de celui-ci étant désigné par r pour la série descendante, et par r' pour la série ascendante (1).

Soient γ et π les demi-diagonales du rhomboïde dont il s'agit, en supposant qu'il fasse partie de la série descendante. Si $r=1$, on aura $g=2\gamma$, d'après ce qui a été dit plus haut (pag. 298). Donc $\gamma=\frac{1}{2}g$. Si $r=2$, on aura, par la même raison, $\gamma=\frac{1}{4}g$; si $r=3$, on aura $\gamma=\frac{1}{8}g$. Donc, en général,

$$\gamma=\frac{g}{2^r},\ \text{et}\ \gamma^2=\frac{g^2}{(2^r)^2}=\frac{g^2}{2^{2r}}=\frac{g^2}{(2^2)^r}=\frac{g^2}{4^r}.$$

Maintenant, puisque l'axe est constant, on a

$$\sqrt{9\pi^2-3\gamma^2}=\sqrt{9p^2-3g^2},\ \text{ou}\ 3\pi^2-\gamma^2=3p^2-g^2.$$

Donc $3\pi^2-\frac{g^2}{4^r}=3p^2-g^2$; d'où l'on tire

$$3\pi^2=3p^2+\frac{1-4^r}{4^r}.g^2,\ \text{et}\ \pi=\sqrt{p^2+\frac{1-4^r}{3.4^r}.g^2}.$$

Supposons que le rhomboïde soit compris dans la série ascendante, et désignant ses demi-diagonales par γ' et π', faisons r' successivement égal à 1, 2, 3, etc. Les valeurs correspondantes de γ' seront $2g$, $4g$, $8g$, etc.,

(1) M. Malus a fait usage de ce problème dans sa *Theorie de la double réfraction* (pag. 121 et suiv.), et l'a résolu par le calcul aux différences finies.

et en général on aura $\gamma'=2^r g$. La substitution de cette valeur de γ' dans l'équation $3\pi'^2-\gamma'^2=3p^2-g^2$ donne

$$3\pi'^2-4^r g^2=3p^2-g^2. \quad \pi'^2=\frac{3p^2+4^r g^2-g^2}{3}=p^2+\frac{4^r-1}{3}g^2,$$

et $$\pi'=\sqrt{p^2+\frac{4^r-1}{3}g^2}.$$

Les perpendiculaires sur l'axe suivent le rapport des demi-diagonales γ et γ', en sorte que l'on a généralement $\sqrt{\frac{1}{3}\gamma^2}=\frac{1}{2^r}\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$ et $\sqrt{\frac{1}{3}\gamma'^2}=2^r\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$.

Si dans les équations $\gamma=\frac{g}{2^r}$ et $\pi=\sqrt{p^2+\frac{1-4^r}{3.4^r}g^2}$ relatives à la série descendante, on suppose r infinie, la valeur de γ devient infiniment petite, et comme l'unité s'évanouit dans la fraction $\frac{1-4^r}{3.4^r}$, la valeur de π se réduit à $\sqrt{p^2-\frac{1}{3}g^2}$ ou $\sqrt{\frac{3p^2-g^2}{3}}$, qui représente le tiers de l'axe, dont l'expression est

$$\sqrt{9p^2-3g^2};$$

d'où il résulte que, dans ce cas, la diagonale oblique se confond avec l'axe, en sorte que le rhomboïde se trouve converti en une aiguille dont la longueur surpasse infiniment l'épaisseur.

D'une autre part, si dans les équations

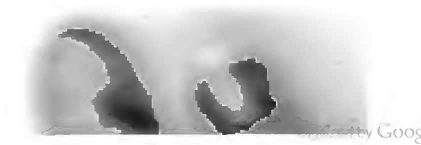
$$\gamma'=2^r g, \text{et } \pi'=\sqrt{p^2+\frac{4^r-1}{3}g^2};$$

qui se rapportent à la série ascendante, on suppose r infinie, la valeur de γ' devient elle-même infinie, et les quantités p^2 et -1 s'évanouissant dans la valeur de π', on a $\gamma':\pi'::2g:\sqrt{\frac{4}{3}g^2}::\sqrt{3}:1$; c'est-à-dire que le rhomboïde qui répond à cette limite se réduit à un simple plan qui s'étend à l'infini, et que les angles qui représentent ceux du sommet, et qui se trouvent sur le même plan, sont chacun de 120^d.

Dans la chaux carbonatée, le rhomboïde que j'ai nommé *équiaxe* offre le premier terme de la série ascendante; je prouverai dans la suite que le rhomboïde *binaire* du fer oligiste donne le second terme.

Nous trouverons aussi les deux premiers termes de la série descendante dans les variétés de chaux carbonatée appelées *inverse* et *contrastante*. Tous ces rhomboïdes nous fourniront diverses applications d'un problème qui est lié au précédent, et dont le but est de déterminer la loi de décroissement, en vertu de laquelle le générateur produit immédiatement un rhomboïde quelconque appartenant à l'une des deux séries, et dont le rang r ou r' est donné.

15. Il me reste à démontrer diverses propriétés géométriques qui dérivent des décroissemens sur les bords supérieurs, et qui sont tellement liées entre elles, que l'une étant donnée, les autres en deviennent la suite nécessaire. Mais il faut auparavant indiquer la position d'un solide que l'on peut toujours concevoir comme inscrit dans la forme secondaire



qui présente ces propriétés, et auquel une partie d'entre elles se rapportent.

Soit *sz* (fig. 7) un rhomboïde aigu faisant la fonction de noyau, et soit *sz* (fig. 8) un dodécaèdre à triangles scalènes produit en vertu d'un décroissement sur les bords supérieurs de ce noyau, de manière que *sh*, *sm*, soient les lignes de départ qui répondent à *sa*, *sc* (fig. 7) et ainsi des autres. Si l'on fait passer des plans, l'un par les arêtes *lh*, *lm* (fig. 8), un second par les arêtes *ml*, *mn*; un troisième par les arêtes *mn*, *no*, etc., ces plans, au nombre de six, intercepteront un rhomboïde que nous désignerons par le nom de rhomboïde hypothétique, pour le distinguer du noyau. Cela posé, voici l'énoncé du problème à résoudre.

Tout rhomboïde aigu dans lequel le rapport de g^2 à p^2 est rationnel, est susceptible de produire, en vertu d'une loi de décroissement sur les bords B, laquelle dépend du même rapport, un dodécaèdre *sz* (fig. 8) qui réunira les propriétés suivantes :

1°. La plus petite incidence de deux faces de ce dodécaèdre, telles que *hsl*, *hsr* sera égale d'une part à la plus grande incidence de deux faces du noyau, telles que *sabc*, *abzf* (fig. 7), et d'une autre part à l'angle plan obtus *hlm* du rhomboïde hypothétique.

2°. L'incidence de deux faces adjacentes telles que *hls*, *hlz*, prises vers les deux sommets du dodécaèdre, sera égale d'une part à l'angle plan obtus *sab* ou *saf* (fig. 7) du noyau, et d'une autre part à la plus grande

incidence de deux faces du rhomboïde hypothétique.

16. Démontrons d'abord qu'il y aura toujours une valeur rationnelle de l'exposant n du décroissement, qui satisfera à la condition que la plus petite incidence des faces du dodécaèdre soit égale à la plus grande des deux faces du noyau.

Soit $pceg$ (fig. 9) une coupe transversale de ce noyau, menée par le point p (fig. 8), pris à volonté sur la ligne sm, qui coïncide, comme nous l'avons dit, avec un des bords supérieurs du même noyau, et soit px (fig. 9) la section du prolongement du rhombe $pceg$ sur le plan du triangle sml (fig. 8). Soit pfd le triangle mensurateur, qui sera semblable au triangle pcx. Désignant par r la dimension qui, sur la molécule, répond au côté du rhombe $pceg$, nous aurons $pf : fd :: n \times r : r :: n : 1$.

De plus, si nous menons cz perpendiculaire sur pg, pz sera le cosinus de la plus petite incidence des faces du noyau, le rayon étant représenté par cp. Donc $cp : pz :: 2p^2 : p^2 - g^2$. Or, les triangles czp et pdf ou pxc, sont semblables : car l'angle epx qui mesure la moitié de la plus petite incidence des faces du dodécaèdre, étant par l'hypothèse égal à $\frac{pce}{2}$, on aura, en retranchant d'une part cpe, et de l'autre $\frac{1}{2}cpg$, $epx - cpe$, ou $cpx = \frac{1}{2}(pce - cpg.)$ D'une autre part, l'angle droit ecz étant la demi-somme des angles pce et cpg, qui sont complémens l'un de l'autre, l'angle

pcz en sera la demi-différence. Donc

$$pcz = \frac{1}{2}(pce - cpg) = cpx.$$

D'ailleurs, $cpz = pcx$, à cause des parallèles *pg*, *ex*; donc les triangles *czp* et *pxc* étant semblables, nous aurons $cp : cx$ ou $pf : fd :: cp : pz$; et $n : 1 :: 2p^2 : p^2 - g^2$, ce qui donne $n = \frac{2p^2}{p^2 - g^2}$; et ainsi la première propriété est démontrée possible, d'une manière d'autant plus remarquable, que la valeur de *n* se trouve représentée par le rapport rationnel entre le rayon et le cosinus de la plus petite incidence des faces du noyau.

Il résulte de la démonstration précédente, que chacun des triangles du dodécaèdre, par exemple celui qui coïncide avec *px*, est perpendiculaire sur la face du noyau adjacente à celle sur laquelle naît le décroissement qui donne le triangle dont il s'agit, c'est-à-dire sur celle qui est dirigée suivant *pg*.

La formule fait connaître que la propriété qu'elle représente ne peut avoir lieu qu'autant que *p* est plus grand que *g*, c'est-à-dire que le noyau est nécessairement un rhomboïde aigu. La limite de cette propriété répond au terme où *p* étant égal à *g*, le rhomboïde devient un cube. On a alors $n = \frac{2p^2}{0}$, quantite infinie, ce qui indique que les faces du dodécaèdre se confondent avec celles du noyau cubique.

17. L'égalité suivante est celle qui a lieu entre l'incidence des m[illegible] *hsl*, *hsr*, et l'angle plan

obtus hlm du rhomboïde hypothétique. Désignons par g', p', les demi-diagonales de ce rhomboïde. L'incidence de hsl, hsr étant égale à la plus grande des faces du noyau, ou à l'angle pce, comme nous venons de le prouver, et le rapport du sinus py au cosinus cy de la moitié de cette dernière incidence étant celui de $\sqrt{3p^2 - g^2} : \sqrt{g^2 + p^2}$, le problème sera résolu, si, dans l'hypothèse de $n = \frac{2p^2}{p^2 - g^2}$ on a

$$g' : p' :: \sqrt{3p'^2 - g'^2} : \sqrt{g'^2 + p'^2}.$$

Supposons deux perpendiculaires menées sur l'axe du dodécaèdre sz (fig. 8), l'une d'un des angles latéraux supérieurs, tel que m, du rhomboïde hypothétique, l'autre de l'un de ses angles latéraux inférieurs, tel que r. Il est facile de concevoir que la partie de l'axe qu'elles intercepteront sera égale au tiers de l'axe du rhomboïde hypothétique. Servons-nous de la figure 5, relative aux décroissemens sur les bords supérieurs, en supposant que la coupe principale $adsg$ du noyau appartienne, comme dans le cas présent, à un rhomboïde aigu. Les points p, m, étant les analogues des points m, r (fig. 8), hu (fig. 5) représentera le tiers de l'axe du noyau hypothétique, et l'on aura

$$hu = au - ah = au - su = \left(\frac{2n-1}{3n} - \frac{(n+1)}{3n}\right)a = \frac{n-2}{3n}a$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{9p'^2 - g'^2}.$$



D'une autre part,

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} = \frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}, \text{ ou } \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} = \frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}.$$

Donc

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} :: \frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : \frac{n-2}{3n}.a,$$

ou $g'^2 : 3p'^2 - g'^2 :: (n+1)g : (n-2)a\sqrt{\tfrac{1}{3}}$.

Ajoutant chaque antécédent à son conséquent, et divisant les deux nouveaux conséquens par 3,

$$g'^2 : p'^2 :: (n+1)^2 g^2 : (n-2)^2 \tfrac{1}{9}a^2 + (n+1)^2 \tfrac{1}{3}g^2;$$

et mettant à la place de n sa valeur $\frac{2p^2}{p^2-g^2}$,

$$g'^2 : p'^2 :: (3p^2 - g^2)^2 g^2 : \tfrac{4}{3}g^4(3p^2 - g^2) + (3p^2 - g^2)^2 \tfrac{1}{3}g^2$$
$$:: (3p^2 - g^2)g^2 : \tfrac{4}{3}g^4 + (3p^2 - g^2)\tfrac{1}{3}g^2 :: 3p^2 - g^2 : \tfrac{4}{3}g^2$$
$$+ p^2 - \tfrac{1}{3}g^2 :: 3p^2 - g^2 : g^2 + p^2.$$

Donc, $g' : p' :: \sqrt{3p^2 - g^2} \quad \sqrt{g^2 + p^2}$, ce qu'il fallait trouver.

Puisque l'angle *hlm* ou *lhr* est égal en même temps à l'angle *pce* (fig. 9), et à celui que font entre elles les faces *hsl*, *hsr* (fig. 8), il résulte de cette dernière égalité, que l'arête *hs* est perpendiculaire sur le plan auquel appartient l'angle *lhr*, d'où il suit encore que les angles *shl*, *shr*, et les autres semblablement situés sont droits. Ainsi, tous les dodécaèdres renfermés dans la formule $n = \frac{2p^2}{g^2 - g'^2}$ ont cette autre propriété remarquable, que leurs faces sont des triangles rec-

tangles. Par une suite nécessaire, les faces du dodécaèdre, telles que *hsl*, *hsr*, font des angles droits avec la face du rhomboïde hypothétique qui leur est adjacente, c'est-à-dire, dans le cas présent, avec celle que termine l'angle *lhr*. On voit ici reparaître, dans la relation entre les faces du dodécaèdre et celles du noyau hypothétique, la même incidence perpendiculaire qui a déjà été observée dans les positions respectives des faces du dodécaèdre et de celles du noyau.

18. Passons aux analogies qui dérivent de l'incidence des faces *hls*, *hlz*, prises vers les deux sommets. Cette incidence est d'abord égale à l'angle plan obtus *sab*, ou *saf* (fig. 7) du noyau, et cela par une suite nécessaire de ce que les angles *shl*, *shr* (fig. 8), sont droits. Pour le prouver, d'un point quelconque *x* de l'arête *hl*, je mène les lignes *xt*, *xy*, perpendiculaires sur cette arête, et couchées sur les faces *shl*, *lzh*. L'angle *shl* étant droit, *tx* est parallèle à *hs*, qui coïncide avec le bord supérieur *as* du noyau (fig. 7). Par la même raison, *xy* (fig. 8) est parallèle à *lz*, qui coïncide avec le bord inférieur *bz* du noyau (fig. 7). Mais *bz* est parallèle à *af*; donc *xy* (fig. 8) est aussi parallèle à *af* (fig. 7). D'ailleurs *tx* (fig. 8) est parallèle à *as* (fig. 7); donc l'angle *txy* (fig. 8) est égal à l'angle *saf* (fig. 7).

Reste à prouver que l'incidence de *hls* sur *hlz* est aussi égale à la plus grande incidence des faces du rhomboïde hypothétique. Désignant par *s* le sinus

de la moitié de l'incidence de *hls* sur *hlz*, et par c le cosinus, nous aurons, d'après ce qui vient d'être dit,

$$s : c :: p : g.$$

La question se réduit donc à prouver que l'on a d'une autre part $p : g :: \sqrt{g'^2 + p'^2} : \sqrt{3p'^2 - g'^2}$, puisque ce dernier rapport est celui qui a lieu entre les demi-diagonales de la coupe transversale du noyau hypothétique.

Nous avons eu plus haut,

$$g' : p' :: \sqrt{3p^2 - g^2} : \sqrt{g^2 + p^2},$$

ou $$g'^2 : p'^2 :: 3p^2 - g^2 : g^2 + p^2.$$

Or, il est facile de transformer cette proportion en celle que nous cherchons. Car, ajoutant chaque conséquent à son antécédent, nous aurons

$$g'^2 + p'^2 : p'^2 :: 4p^2 : g^2 + p^2, \text{ou } g'^2 + p'^2 : 4p'^2 : p^2 : g^2 + p^2;$$

et retranchant les antécédens des conséquens,

$$g'^2 + p'^2 : 3p'^2 - g'^2 :: p^2 : g^2.$$

Donc $p : g :: \sqrt{g'^2 + p'^2} : \sqrt{3p'^2 - g'^2}$, ce qu'il fallait trouver.

Ce résultat comparé à celui d'où nous l'avons déduit, et qui donne $g' : p' :: \sqrt{3p^2 - g^2} : \sqrt{g^2 + p^2}$, nous fait connaître que les angles plans du noyau sont égaux aux angles saillans du rhomboïde hypothétique, ou à ceux de sa coupe principale et réciproquement, ce que l'on exprime en disant que

chacun des rhomboïdes est l'inverse de l'autre. Cette inversion est donc aussi une propriété inhérente à la valeur $\frac{2p^2}{p^2-g^2}$ de n, et offre une nouvelle preuve de sa fécondité. Je traiterai directement, dans la suite, de ces sortes d'inversions, dont plusieurs rhomboïdes de chaux carbonatée offrent des exemples.

19. Je n'ai observé jusqu'ici aucun dodécaèdre produit en vertu d'un décroissement sur les bords supérieurs d'un rhomboïde aigu, qui réalisât complètement les résultats démontrés précédemment. Nous verrons cependant que parmi les formes secondaires originaires du tétraèdre régulier, dont la cristallisation rentre dans celle du rhomboïde, il en est une qui participe des propriétés d'où dépendent ces résultats. De plus, nous ferons connaître un dodécaèdre de chaux carbonatée, qui ne diffère de celui dont il s'agit ici, qu'en ce que le rhomboïde que nous avons considéré comme le noyau, et celui que nous avons nommé hypothétique, y changent de rôle, de manière que le décroissement qui donne le dodécaèdre a lieu sur les bords inférieurs du second rhomboïde.

II. *Décroissemens sur l'angle supérieur.*

20. Ces décroissemens donneront constamment des rhomboïdes pour formes secondaires. Continuons de nous servir de la figure 5, dans laquelle *ao* représentera la diagonale oblique d'une des faces du

rhomboïde secondaire, et *so* l'arête contiguë de cette diagonale, en sorte que si du point *o* on mène une perpendiculaire sur l'axe, elle coïncidera avec *dr*, puisque le point *o* doit être situé vis-à-vis le tiers de l'axe. De plus, *atz* qui, dans le cas précédent, remplaçait le véritable triangle mensurateur, deviendra ici d'un usage direct; et la quantité *n* désignera toujours le nombre des diagonales soustraites, avec la différence qu'il faudra doubler ce nombre pour avoir celui des rangées soustraites.

21. Proposons-nous d'exprimer d'une manière générale les valeurs des deux demi-diagonales g' et p' du rhomboïde secondaire, en supposant que l'on connaisse g, p et n.

Nous avons d'abord

$$or : ar :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2}.$$

Et parce que les expressions de *mu* et *au* restent les mêmes que dans le cas des décroissemens sur les bords supérieurs (9, 1°. et 2°.), nous aurons,

$$or : ar :: mu : au :: (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$$
$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2}.$$

Mais l'axe du rhomboïde secondaire est le même que celui du noyau; donc la proportion précédente devient, toute réduction faite, $(n+1)g : 2n-1 :: g' : 2$. D'où l'on tire $g' = 2g\,\frac{(n+1)}{2n-1}$.

Maintenant, à cause de l'égalité des axes,

$$3p'^2 - g'^2 = 3p^2 - g^2;\ \text{ou},\ 3p'^2 = g'^2 + 3p^2 - g^2;$$

donc aussi,

$$3p'^2 = 4g^2\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 + 3p^2 - g^2;$$

donc

$$p' = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 + p^2 - \tfrac{1}{3}g^2}.$$

22. Supposons que le décroissement ait lieu par deux rangées, et que le noyau soit le rhomboïde du fer oligiste, représenté (fig. 10), dans lequel $g = \sqrt{9}$ et $p = \sqrt{10}$, ce qui donne 87ᵈ9′, pour l'incidence de deux faces prises vers un même sommet. On aura $n = 1$, et la proportion deviendra

$$g' : p' :: \sqrt{144} : \sqrt{55}.$$

J'appelle *fer oligiste binaire* la variété qui offre ce résultat. L'incidence de deux faces *s*, *s* (fig. 11), prises vers un même sommet A′ est de 144ᵈ, et celle de *s* sur la face adjacente du côté du sommet inférieur est de 36ᵈ.

Quelquefois le décroissement s'arrête, avant d'avoir atteint sa limite. Alors les faces produites par ce décroissement se réduisent à des triangles isocèles, *s*, *s*, *s* (fig. 12), et il reste sur le cristal des faces P, P, P, parallèles à celles du noyau, et qui sont aussi des triangles, en supposant la forme ramenée à sa limite géométrique. Cette variété porte le nom de



fer oligiste rhomboïdal. L'incidence de *s* sur P est de 144^d 8′ (1).

23. Si l'on fait $n=2$, auquel cas le décroissement aura lieu par quatre rangées, on trouve $g'=2g$ et $p'=\sqrt{g^2+p^2}$. Or ce rappórt est aussi celui des demi-diagonales d'un rhomboïde secondaire qui résulterait du décroissement $\underset{1}{B}$, autour d'un noyau dont les demi-diagonales seraient g et p. Concluons de là que dans la série des rhomboïdes que nous avons considérée plus haut, et dont chacun est susceptible d'être produit par le suivant, pris pour noyau, à l'aide de la loi $\underset{1}{B}$, le même résultat peut aussi avoir lieu en vertu de la loi $\underset{4}{A}$. Nous verrons souvent reparaître, dans le développement de la théorie, ces doubles solutions d'un même problème, dont plusieurs sont réalisées par la cristallisation. Mais celle qui vient de nous occuper est jusqu'ici purement hypothétique.

---

(1) Pour avoir cette incidence, on fera attention qu'elle est égale à la somme des angles *amu* (fig. 5) et *dkn*, dont l'un mesure l'inclinaison de *s* (fig. 12) sur un plan horizontal qui passe par la base du même triangle, et l'autre celle de P sur le même plan. Le rapport de *mu* à *ou* que nous avons déterminé plus haut (pag. 311), donnera la première inclinaison, et l'on aura la seconde en cherchant d'abord l'angle *akn*, d'après le rapport de *kn* à *an*, ou de g à $\sqrt{3p^2-g^2}$, et en prenant ensuite le supplément de cet angle.

24. Faisons $n = \frac{1}{2}$, ce qui est le cas d'un décroissement par une rangée. La formule

$$p' = \sqrt{\frac{3}{4}g^2\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 + p^2 - \frac{1}{3}g^2}$$

deviendra $p' = \sqrt{\frac{4}{3}g^2 \times \frac{9}{0} + p^2 - \frac{1}{3}g^2}$, ce qui signifie que la diagonale oblique *ao* (fig. 5) est elle-même infinie, et que par conséquent la face sur laquelle elle tombe est horizontale (1). Ce cas a lieu

---

(1) La construction suivante aidera à concevoir ce que signifient ces sortes de rapports que l'on dit être infinis lorsqu'ils expriment une quantité finie divisée par zéro, et infiniment petits dans le cas contraire. Soient *nm*, *ec* (fig. 14), deux parallèles qui tombent à angle droit ou autrement sur une droite *cp*. Par un point *d* pris à volonté sur *nm*, menons *adf* qui fasse un angle quelconque avec *cp*, puis menons *db* parallèle à cette dernière ligne. Faisons $ab = x$, $bd = a$, $dm = g$. Nous aurons $x : a :: g : fm = \frac{ag}{x}$. Si nous supposons maintenant que la ligne *adf* restant fixe par le point *d*, s'abaisse par son extrémité *a*, de manière à prendre successivement la position *odp*, et d'autres positions qui soient telles, que le point *o* tende continuellement vers le point *b*, la ligne *adf* approchera de plus en plus du parallélisme avec *cp*, qui est la limite de toutes les positions dont il s'agit. En même temps dans l'équation $fm = \frac{ag}{x}$, la quantité *fm* ira en croissant, et la quantité x diminuera. Or, lorsque x s'évanouit, auquel cas l'équation devient $fm = \frac{ag}{0}$, le point *a* se confond avec le point *b*, et la ligne *fm* est infinie, puisqu'elle ne peut

dans la chaux carbonatée, le corindon, le fer oligiste, la tourmaline, etc. Alors, ou bien il se fait un second décroissement d'où résultent des faces latérales dont les intersections limitent la face supérieure, ou bien il reste des faces parallèles à celles du noyau.

Le fer oligiste, entre autres, offre un exemple de cette dernière modification dans la variété que je nomme *fer oligiste basé*, et qui est représentée (fig. 13). L'incidence de P sur la surface *o* qui fait la fonction de base, est de 123^{d} 14′ (1).

25. Si nous supposons que la ligne *ao* (fig. 5), qui représente en général la diagonale oblique des rhomboïdes secondaires produits par un décroissement sur l'angle supérieur du noyau, dépasse la limite qui répond à $n = \frac{1}{2}$, et qui donne une face perpendiculaire à l'axe, elle se rejettera du côté opposé à celui où naît le décroissement, en prenant une position telle que *ap* (fig. 15). Les faces du

---

plus rencontrer la ligne *af*, qui lui est devenue parallèle, en atteignant la limite de ses positions. On voit par là dans quel sens on doit entendre que le rapport $\frac{ag}{o}$ représente une quantité infinie. C'est sous ce point de vue que la diagonale *ao* (fig. 5) du rhomboïde secondaire étant devenue parallèle, dans le cas que nous venons de considérer, à la ligne *or*, qu'elle rencontrait jusqu'alors, doit être considérée comme une quantité infinie.

(1) Elle est le supplément de l'angle *akn* (fig. 5), dont la détermination est facile, d'après ce qui a été dit plus haut.

rhomboïde secondaire seront tournées alors vers les arêtes *ag* du noyau, au lieu de correspondre à ses diagonales obliques, comme dans les cas précédens. Je donne à ce mode de décroissement le nom de *décroissement inverse*, pour le distinguer de celui dont la figure 5 représente l'effet, et que j'appelle *décroissement direct*.

Dans le cas présent, le décroissement inverse, s'il est simple, sera toujours du nombre de ceux que l'on nomme *décroissement en hauteur*, ou s'il est mixte, le nombre de rangées dont il déterminera la soustraction dans le sens de la hauteur, sera toujours plus grand que le nombre de rangées soustraites en largeur. C'est une suite nécessaire de ce que n est plus petit que $\frac{1}{2}$. Donnons aussi la manière de calculer les effets des décroissemens dont il s'agit ici.

26. Soit *azt* (fig. 15) le triangle mensurateur. Si l'on prolonge *ta* au-dessus de *ag*, la ligne *ay* coïncidera avec la diagonale oblique du rhomboïde secondaire dont la coupe principale est *apsk*.

Ayant prolongé *sg* jusqu'à la rencontre de *ap*, menons *yu* perpendiculaire sur l'axe *as*. Il faut avant tout déterminer le rapport entre *uy* et *au*.

Cherchons d'abord *uy*.

Les triangles semblables *sgm*, *syu* donnent

$$sg : sy :: gm : uy.$$

$sg = 2p$. $\quad sy = sg + gy$. $\quad$ Cherchons gy.

Les triangles semblables *atz*, *ayg* donnent

$$az : tz :: gy : ag,$$

ou $\quad 2p \times n : \sqrt{g^2+p^2} :: gy : \sqrt{g^2+p^2}.$

Donc $gy = 2np$; donc $sy = 2p + 2np$.

De plus, $gm = \sqrt{\frac{4}{3}g^2}$.

La proportion devient donc,

$$2p : 2p+2np :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : uy = (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Reste à trouver *au*.

Or $au = as - us = \sqrt{9p^2 - 3g^2} - us$.

Cherchons *us*. Les triangles semblables *smg*, *suy* donnent $sg : sy :: sm : us$; ou

$$2p : 2p+2np :: \tfrac{2}{3}\sqrt{a^2} : us \text{ (1)}.$$

Donc $\quad us = \frac{2n+2}{3}\sqrt{a^2}$; donc

$$au\text{, ou } \sqrt{a^2} - \left(\frac{2n+2}{3}\right)\sqrt{a^2} = \frac{1-2n}{3}\sqrt{a^2};$$

donc $\quad uy : au :: (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{1-2n}{3}\sqrt{a^2}.$

27. Déterminons maintenant d'une manière générale les valeurs des deux demi-diagonales g' et p' du rhomboïde secondaire. Il est d'abord évident que dans ce rhomboïde *lm* est la demi-perpendiculaire sur l'axe, et *am* est le tiers de cet axe; et parce

(1) La quantité *a* désigne l'axe du noyau.

que *ml* et *am* sont proportionnelles à *uy* et *au*, nous aurons

$$(n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{1-2n}{3}\sqrt{9p^2-3g^2} :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}\sqrt{9p'^2-3g'^2}.$$

Si l'on supprime les valeurs des axes qui sont égaux, et que l'on simplifie les autres quantités, la proportion devient, $2g(n+1) : 1-2n :: g' : 1$; d'où l'on tire

$$g' = 2g\left(\frac{n+1}{1-2n}\right).$$

Maintenant, à cause de l'égalité des axes, on a

$$3p'^2 - g'^2 = 3p^2 - g^2,$$

ou

$$p'^2 = \tfrac{1}{3}g'^2 + p^2 - \tfrac{1}{3}g^2 = \tfrac{1}{3}\cdot 4g^2\left(\frac{n+1}{1-2n}\right)^2 + p^2 - \tfrac{1}{3}g^2.$$

Donc $p' = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2\left(\frac{n+1}{1-2n}\right)^2 + p^2 - \tfrac{1}{3}g^2}.$

28. Les mêmes rhomboïdes qui résultent d'un décroissement direct sur l'angle supérieur, et dont les faces sont tournées vers les diagonales obliques du noyau, sont encore susceptibles d'être produits en vertu d'un décroissement inverse, de manière que leurs faces correspondent aux arêtes du noyau. Cherchons une formule à l'aide de laquelle étant donnée la loi relative à l'un de ces rhomboïdes, on puisse connaître celle d'où l'autre dépend. Soit toujours n le nombre des diagonales soustraites dans le décroissement direct; désignons par n' le nombre correspondant pour le décroissement inverse. Si l'on

compare les formules qui expriment, relativement aux deux rhomboïdes, les demi-diagonales g' et p', on verra qu'elles ne diffèrent que par le facteur qui renferme la quantité n, et qui est d'une part $\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2$, et d'une autre part $\left(\frac{n'+1}{1-2n'}\right)^2$, n' devant être substitué à n dans la seconde. Donc puisque les diagonales sont égales, on aura

$$\frac{n+1}{2n-1}=\frac{n'+1}{1-2n'},$$

d'où l'on tire

$$n=\frac{2-n'}{4n'+1} \quad \text{et} \quad n'=\frac{2-n}{4n+1}.$$

Ces formules indiquant les mêmes fonctions réciproques entre n et n', l'une d'elles, prise à volonté, par exemple la première, qui est $n=\frac{2-n'}{4n'+1}$, suffit pour la solution des deux espèces de problèmes; c'est-à-dire que l'on peut supposer indifféremment à n' une valeur moindre ou plus grande que la fraction $\frac{1}{2}$, relative à un rhomboïde qui, dans le premier cas, naîtra d'un décroissement inverse, et dans le second d'un décroissement direct; la valeur qui en résultera pour n se rapportera au rhomboïde correspondant, produit en vertu d'un décroissement direct ou inverse.

29. Lorsque dans la formule on fait $n'=\frac{1}{2}$, comme cela doit être, les triangles mensurateurs *azt* (fig. 5) et *azt* (fig. 15) étant alors égaux et semblables, les lignes *ao* (fig. 5) et *ap* (fig. 15), coïncident sur une même direction perpendiculaire à l'axe *as*.

Si l'on fait $n'=1$, on trouvera $n=\frac{1}{5}$, qui indique que le décroissement direct par deux rangées en largeur a pour analogue un décroissement mixte par deux rangées dans le même sens, et par cinq rangées en hauteur. Si l'on substitue la seconde valeur à la place de n dans les expressions de g' et de p' relatives au décroissement inverse, et si l'on fait $g=\sqrt{9}$, $p=\sqrt{10}$, comme dans le fer oligiste, on aura

$$g':p'::6.2:\sqrt{12.4+10-3}::\sqrt{144}:\sqrt{55},$$

ce qui est le même rapport que nous avons trouvé pour le fer oligiste binaire (22). Mais ce double emploi d'une même forme produite par les deux décroissemens dont il s'agit, ne s'est, point encore rencontré parmi les produits de la cristallisation.

Soit $n'=2$; on trouvera $n=\frac{0}{9}$, quantité infiniment petite, qui fait connaître que dans ce cas la ligne *ap* (fig. 15) se confond avec la ligne *ag*, c'est-à-dire que le rhomboïde secondaire est semblable à celui qui résulte d'un décroissement par une rangée sur les bords supérieurs du noyau. Nous avons déjà obtenu (23) le même résultat par une méthode différente.

Au reste, nous verrons dans la suite que les résultats des décroissemens inverses dont nous venons de parler rentrent parmi ceux des décroissemens intermédiaires auxquels il paraît souvent plus naturel de les rapporter. Mais la méthode précédente peut servir à en simplifier le calcul.



III. *Décroissemens sur les bords inférieurs.*

30. Les solides secondaires qui naissent de cette espèce de décroissement sont toujours des dodécaèdres à faces triangulaires scalènes, dont un des côtés se confond avec une des arêtes latérales *bd*, *df*, *fq*, etc. (fig. 1) du rhomboïde primitif.

Soit *adsg* (fig. 16) la coupe principale de ce rhomboïde, *pu* l'axe du dodécaèdre secondaire, *pd*, *du* deux arêtes contiguës de ce dodécaèdre. Soit *dho* le triangle mensurateur, dans lequel *ho* sera égal à une arête de molécule, et *dh* à autant de diagonales obliques de molécule qu'il y aura de rangées soustraites. Soit *n* le nombre de ces diagonales, *p'* la moitié de l'une des mêmes diagonales, et *g'* la moitié de la diagonale horizontale.

Nous aurons $ho = \sqrt{g'^2 + p'^2}$ et $dh = 2np'$.

31. Déterminons d'abord la partie *ap* de l'axe du cristal secondaire, ou la quantité dont cet axe dépasse de chaque côté celui du noyau.

Ayant prolongé *ga* jusqu'à la rencontre de *dp*, nous aurons les triangles semblables *pal*, *psd*, qui donnent $ds : ps :: al : ap$.

Or, 1°. $ds = \sqrt{g^2 + p^2}$.

2°. $ps = ap + as = ap + \sqrt{9p^2 - 3g^2}$.

3°. Pour *al*. Les triangles semblables *dho*, *dal*, donnent $dh : oh :: ad : al$.

Ou $2np' : \sqrt{g'^2 + p'^2} :: 2p : al = \frac{p}{n}\sqrt{\frac{g'^2 + p'^2}{p'^2}}$.

Et parce que les dimensions des molécules sont proportionnelles à celles du noyau, on aura, en substituant le rapport $\frac{g^2+p^2}{p^2}$ au rapport $\frac{g'^2+p'^2}{p'^2}$,

$$al=\frac{1}{n}\sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc la proportion $ds:ps::al:ap$ devient

$$\sqrt{g^2+p^2}:ap+\sqrt{9p^2-3g^2}::\frac{1}{n}\sqrt{g^2+p^2}:ap.$$

D'où l'on tire $ap=\frac{1}{n-1}\sqrt{9p^2-3g^2}.$

32. Déterminons maintenant les incidences respectives des faces du dodécaèdre, aux endroits des arêtes contiguës aux sommets. Soit *as* (fig. 17) le noyau, et *bpd*, *dpf*, *fpq* trois des faces du dodécaèdre. Menons la demi-diagonale horizontale *de* du rhombe *dfqs*, puis ayant prolongé *pf*, menons *dk* perpendiculaire sur ce prolongement, et joignons les points *k*, *e*, par une droite. L'angle *dke* mesurera la moitié de l'incidence de *dpf* sur *fpq*.

D'une autre part, menons la demi-diagonale horizontale *fc* du rhombe *abdf*, puis *fz* perpendiculaire sur *dp*, et joignons les points *c*, *z*, par une droite. L'angle *fzc* mesurera la moitié de l'incidence du triangle *fpd* sur *bpd*, et il est facile de voir que cette incidence sera toujours plus grande que la première.

Cherchons d'abord *de* et *ek*.

Il est évident que $de=g$. Reste à trouver *ek*.

Soit *pg* (fig. 16) l'arète qui passerait par les



mêmes points (fig. 17), et qui sera égale à pf. Menons sy (fig. 16) perpendiculaire sur le prolongement de pg, et par le milieu e de sg une autre perpendiculaire ek sur le même prolongement. Celle-ci sera la même que ek (fig. 17), et nous aurons sa valeur, au moyen de celle de sy qui en est le double.

Les triangles semblables png, pys, donnent

$$pg : gn :: ps : sy.$$

1°. Pour pg. Nous avons $pg = \sqrt{(pn)^2 + (gn)^2}$.

$$pn = ap + an = \frac{1}{n-1}\sqrt{9p^2 - 3g^2} + \tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$$
$$= \frac{n+2}{3n-3}\sqrt{9p^2 - 3g^2} \quad (31).$$

$gn = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$. Donc $pg = \sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2}$.

2°. Connaissant déjà gn, cherchons ps.

Or $ps = ap + as = \frac{1}{n-1}\sqrt{a^2} + \sqrt{a^2} = \frac{n}{n-1}\sqrt{a^2}$.

Donc, la proportion $pg : gn :: ps : sy$ devient

$$\sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \frac{n}{n-1}\sqrt{a^2} : sy$$
$$= \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{\tfrac{4}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2}}.$$

Prenant donc la moitié de cette expression pour la

valeur de *ek* (fig. 17), nous aurons

$$de : ek :: g : \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2a^2+\frac{4}{3}g^2}}$$

$$:: \sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2a^2+\frac{4}{3}g^2} : \frac{n}{n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}.$$

Cherchons aussi *fc* et *cz*.

$fc=g$. Reste à trouver *cz*.

Du point *a* (fig. 16) pris à l'extrémité de l'axe, et du point *c* pris au milieu de *ad*, menons *ax* et *cz* toutes deux perpendiculaires sur *dp*. *cz* sera la même ligne que fig. 16, et *ax* en sera le double.

Or, les triangles semblables *prd*, *pxa* donnent

$$dp : dr :: ap : ax.$$

dr et *ap* étant déjà connues, il ne faut plus que chercher *dp*.

Nous avons $dp=\sqrt{(pr)^2+(dr)^2}$.

$$pr=ap+ar=\frac{1}{n-1}\sqrt{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a^2}=\frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{a^2}$$

(*voyez* 31).

Donc $dp=\sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2a^2+\frac{4}{3}g^2}$.

Donc la proportion devient,

$$\sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2a^2+\frac{4}{3}g^2} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \frac{1}{n-1}\sqrt{a^2} : ax.$$

Prenant la moitié de la valeur de *ax*, nous aurons *cz*



(fig. 16); et

$$fc : cz :: g : \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{n-1}\right)^2 \frac{1}{3} a^2 g^2}{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{3} g^2}}$$

$$:: \sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{3} g^2} : \left(\frac{1}{n-1}\right) \sqrt{\tfrac{1}{3} a^2}.$$

33. Déterminons encore l'incidence de l'une quelconque *dpf* (fig. 17) des faces situées vers l'un des sommets, sur la face adjacente, de l'autre côté de *df*, vers le sommet opposé.

Soit *abcd* (fig. 18) la coupe transversale du noyau, et *bzx* le triangle mensurateur. Du point *x* abaissons *xm* perpendiculaire sur la diagonale *bd*, et par le point *z* menons *zt* perpendiculaire sur *xm*. Soient g', p' les demi-diagonales qui, sur la molécule, répondent à *bo* et *ao*, et soit *r* la dimension qui, sur la même molécule, répond à *ab*. Nous aurons $bz = n + r$, et $xz = r = sz$; de plus *st* ou $tx = p'$ et $tz = g'$; et il est facile de voir que l'angle *xbm* mesurera la moitié de l'incidence cherchée. La question se réduit donc à trouver le rapport entre le sinus *mx* et le cosinus *bm* de cet angle.

Les triangles semblables *bsm*, *tsz* donnent $bs : sz :: ms : st$, ou, $bs : 2sz :: ms : 2st$ et $bs + 2sz$, ou $bz + sz : 2sz :: ms + 2st$ ou $mx : 2st$. Donc $nr + r : 2r :: mx : 2p'$, ou $n + 1 : 1 :: mx : p'$. Donc $mx = (n + 1)p'$. D'une autre part, les mêmes triangles donnent $bs : sz :: bm : tz$, et $bz - sz$ ou.....

$nr - r : r :: bm : g'$; ou, $n - 1 : 1 :: bm : g'$. Donc $bm = (n - 1)g'$. Donc $mx : bm :: (n+1)p' : (n-1)g'$.

34. Voici une autre manière de parvenir au même résultat. Ayant prolongé xz jusqu'à la rencontre h de bd, j'observe que mx contient autant de fois p' que xz ou r est contenu de fois dans hx. Mais

$$hx = hz + xz = bz + xz = nr + r = (n+1)r.$$

Donc $mx = (n+1)p'$. D'une autre part, bm contient autant de fois g' que r est contenu de fois dans bs; mais $bs = bz - sz = nr - r = (n - 1)r$.

Donc $$bm = (n - 1)g'.$$

Donc $$mx : bm :: (n+1)p' : (n - 1)g'.$$

Or, les formules relatives aux propriétés générales des rhomboïdes (p. 285) donnent

$$p' : g' :: \sqrt{3p^2 - g^2} : \sqrt{g^2 + p^2} ;$$

d'où l'on conclura que

$$mx : bm :: (n+1)\sqrt{3p^2 - g^2} : (n - 1)\sqrt{g^2 + p^2}.$$

35. Avant d'appliquer les différentes expressions que nous venons de trouver, je vais démontrer plusieurs propriétés générales relatives au mode de décroissement que nous considérons ici.

La première consiste en ce que le rapport des solidités du solide primitif et du dodécaèdre secondaire, est le même que celui des axes, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de p et de g.

Pour le démontrer, faisons passer un premier plan

par *dps*, et un second par *spf*; ces deux plans joints à *dpf* et *dfs* intercepteront une pyramide triangulaire, dont nous supposerons le sommet en *f*, d'où il suit que la base sera *dps*.

D'une autre part, nous aurons dans le rhomboïde une pyramide correspondante, dont les faces seront *das*, *saf*, *daf* et *dfs*. Supposons de même le sommet en *f*; la base sera *das*. Or cette base est à la base *dps* de la première pyramide comme

$$as : ps :: a : a + \frac{1}{n-1}\, a.$$

Donc puisque les deux sommets se confondent, les solidités des pyramides seront entre elles dans le rapport des mêmes quantités. Mais la partie du dodécaèdre dont il s'agit ici est composée de six pyramides, ainsi que le rhomboïde. Donc la solidité du rhomboïde est aussi à celle de cette partie, comme

$$a : a + \frac{1}{n-2}\, a.$$

Donc si l'on désigne par d^x l'excès de cette même partie sur le rhomboïde, la solidité de celui-ci sera à $d^x :: a : a \frac{1}{n-1} a - a$ ou $:: a : \frac{1}{n-1} a$. Or, la solidité du dodécaèdre entier est $a + 2d^x$; donc celle du rhomboïde est à celle du dodécaèdre

$$:: a : a + \frac{2}{n-1}\, a;$$

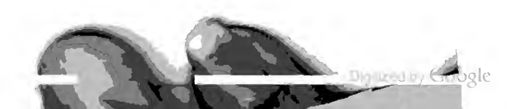
et il est facile de voir que ce rapport est aussi celui des axes.

Ce même rapport réduit à sa plus simple expres-

sion, est $\frac{n-1}{n+1}$, d'où l'on voit que pour avoir s
leur numérique dans chaque cas particulier, il
diviser l'exposant de la loi du décroissement, d
nué d'une unité, par le même exposant augm
d'une unité.

36. Voici une autre propriété dont la déterm
tion est le sujet d'un problème qui peut être énc
de la manière suivante : Tout rhomboïde obtus, da
lequel les carrés des demi-diagonales *g* et *p* sont
rapport rationnel, peut être transformé, à l'ai
d'un décroissement sur les bords inférieurs, dont l
mesure dépend des valeurs de *g* et *p*, en un dodé
caèdre dans lequel le grand angle *pfd* de chaque
face est égal au grand angle *baf* du noyau, et la plus
petite incidence de deux faces voisines, telles que *dpf*,
gpf est égale à l'incidence de deux faces situées vers
un même sommet du noyau, telles que *bafd*, *gafq*.

Remarquons d'abord que l'égalité des angles plans et celle des angles saillans ou des incidences, sont tellement liées entre elles, que l'une ne peut exister sans l'autre. Car les angles *dfp*, *qfp*, par exemple, étant égaux à l'angle *dfq*, il en résulte que les trois faces *dpf*, *qpf*, *dfqs*, dont les deux premières appartiennent au dodécaèdre, et la dernière au noyau, ont la même situation respective que celles qui se réunissent vers un même sommet *a* du noyau, et par conséquent l'incidence de *dpf* sur *qpf*, est la même que celle de deux faces quelconques prises



autour du sommet *a*. Cela posé, nous pouvons faire dépendre la solution du problème de cette seule condition, que l'incidence de *dpf* sur *dfqs*, soit égale à celle de *abdf* sur la face située le long de *ab* derrière le rhomboïde.

Soit *amhl* (fig. 19) la coupe transversale de ce rhomboïde, prise par un plan qui en partant du point *a*, coupe perpendiculairement l'arête *df*. Ayant prolongé *la*, menons *my*, de manière que l'angle *ymh* soit égal à *mal* ou *mhl*, auquel cas *my* sera sur la direction de la face *dpf* (fig. 17), en sorte que l'angle *ymh* (fig. 19) représentera l'incidence de *dpf* (fig. 17) sur *dfqs*, et l'angle *mal* (fig. 19) celle de *abdf* (fig. 17) sur la face dont *ab* fait la jonction avec ce rhombe. Or, *my* et *hl* étant inclinées de la même quantité entre les parallèles *hm*, *ly*, on a $my = hl = am$. Menons *mt* perpendiculaire sur *ay*, et qui la divisera en deux parties égales. Les formules générales relatives à la valeur du cosinus de la plus petite incidence respective des faces d'un rhomboïde, dans lequel g^2 et p^2 sont des quantités rationnelles (6, 2°.), donnent

$$ma : at :: 2p^2 : g^2 - p^2;$$

donc $ma : ay :: 2p^2 : 2g^2 - 2p^2 :: p^2 : g^2 - p^2$.

Soit *mbc* le triangle mensurateur; désignant par *n* le nombre de rangées soustraites, et par *r* la dimension qui, sur la molécule, répond à *ma*, nous aurons

$$mb : bc :: n \times r : r :: ma : ay :: p^2 : g^2 - p^2.$$

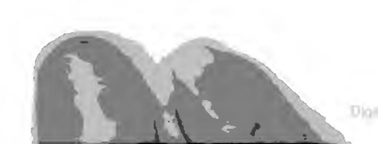
D'où l'on tire, $n : 1 :: p^2 : g^2 - p^2$, et $n = \frac{p^2}{g^2 - p^2}$; c'est-à-dire que la valeur de *n* est la moitié du rapport entre la ligne *am* prise pour rayon, et le cosinus de l'angle *amh*.

37. La propriété dont il s'agit ne peut convenir qu'à un rhomboïde obtus, en sorte que sa limite répond au cas où le noyau est un cube. Alors $g = p$, et $n = \frac{p^2}{0}$, quantité infinie.

Passé cette limite, l'égalité ne peut subsister entre les angles *dfq*, *dfp* et *qfp* (fig. 17), sans que les faces du dodécaèdre ne s'abaissent en dessous de celles du rhomboïde. Pendant ce mouvement, celles qui étaient les moins inclinées, telles que *pfd*, *pfq* continueront de faire entre elles des angles saillans, égaux aux incidences des faces prises vers un même sommet sur le rhomboïde; mais les plus inclinées, telles que *pfd*, *pbd*, feront entre elles des angles rentrans, en sorte que la supposition présente sort des bornes entre lesquelles sont renfermées les lois de la structure qui excluent ces sortes d'angles dans les cristaux simples.

38. On parviendrait au même résultat, en partant de l'observation que l'angle *dke* (fig. 17) doit être égal à l'angle *mar* (fig. 19), dans le cas de la propriété dont il s'agit, le premier étant la moitié de l'incidence relative aux faces du dodécaèdre, et le second étant la moitié de celle qui a lieu pour les





faces du noyau ; et parce que l'on a $mr = de$ (fig. 17) $= g$, on aura aussi $ek = ar$ (fig. 19) ; or,

$$am = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}} \; (6, 2^{\circ}.).$$

Donc *ar* ou

$$\sqrt{(am)^2 - (mr)^2} = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2} - g^2} = \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{g^2+p^2}}.$$

Donc, pour résoudre le problème, il suffira d'égaler cette valeur à celle de *ek*, qui est

$$\frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 + \frac{4}{3}g^2}} \; (32, 2^{\circ}.).$$

Substituant dans celle-ci $9p^2 - 3g^2$ à la place de a^2, et faisant les opérations convenables, on trouve

$$n = \frac{p^2}{g^2 - p^2},$$

comme ci-dessus. Mais cette solution est beaucoup moins simple que la première.

39. L'espèce de décroissement qui nous occupe a fourni le sujet d'un autre problème qui ne diffère que par le générateur auquel il se rapporte, de celui dont la solution nous a servi à développer les propriétés du dodécaèdre *sz* (fig. 8). Dans ce dernier solide, le noyau est le rhomboïde dont les faces se confondent avec les plans *hsm*, *mso*, *osh*, etc., et le décroissement a lieu sur les bords supérieurs de ce noyau.

L'autre rhomboïde dont les faces coïncident avec

les plans *hlm*, *mno*, *orh*, etc., a été considéré comme n'étant qu'hypothétique. Ici les lois de la structure suivent l'ordre inverse, en sorte que le problème ramené à ce nouveau point de vue doit être énoncé de la manière suivante.

Tout rhomboïde obtus, dans lequel le rapport de g^2 à p^2 est rationnel, est susceptible de produire, en vertu d'une loi de décroissement sur les bords D, dont la mesure dépend du même rapport, un dodécaèdre dont voici les propriétés.

1°. La plus petite incidence de deux faces du dodécaèdre, telles que *hsl*, *hsr* (fig. 8), sera égale soit à l'angle plan obtus *hlm* du noyau, soit à la plus grande incidence des faces du rhomboïde hypothétique, par exemple de celles qui se confondent avec les plans *hsm*, *lzn*. Par une suite de la première propriété, les plus grands angles *shl*, *hlz*, etc., des faces du dodécaèdre seront droits, et ses arêtes les plus saillantes, telles que *sh*, seront perpendiculaires chacune sur la face *rhl* du noyau, vers laquelle cette arête est tournée.

2°. L'incidence de deux faces adjacentes, telles que *hls*, *hlz*, prises vers les deux sommets du dodécaèdre, sera égale, d'une part à la plus grande incidence de deux faces du noyau, et d'une autre part à l'angle plan obtus des faces du rhomboïde hypothétique, ou ce qui est la même chose, au supplément de l'angle *hsm*.

Nous avons vu que ces différentes propriétés sont



liées à la condition que l'exposant du décroissement sur les bords supérieurs, que nous désignerons maintenant par n', ait une valeur rationnelle en fonction des demi-diagonales g' et p' du rhomboïde qui dans le cas présent devient hypothétique. Or, en laissant subsister ici cette condition, il ne nous reste qu'à prouver qu'il y a aussi pour l'exposant n du décroissement sur les bords inférieurs, une valeur rationnelle dépendante du rapport entre les demi-diagonales g et p du véritable noyau. Or, il est très facile de s'en convaincre, en faisant attention que les angles *shl*, *shr*, étant droits, chacune des faces *lsh*, *rsh*, est nécessairement perpendiculaire sur le plan *rhl*. Car soit *malh* (fig. 19) la coupe transversale du noyau, prise de manière que le point m coïncide avec le point x (fig. 8). Menons *mt* (fig. 19) perpendiculaire sur le prolongement du côté *la*, et qui coïncidera avec *tx* (fig. 8) perpendiculaire sur *hl*, en sorte que l'angle droit *tmh* (fig. 19) sera celui que forme la face *lsh* (fig. 8) avec le plan *rhl* qui appartient à l'une des faces du noyau. Soit *mou* (fig. 19) le triangle mensurateur, et r la dimension qui, sur la molécule, répond à *ma*. Le calcul relatif à la valeur du cosinus *at* du petit angle *amn* de la coupe transversale donne $ma : at :: 2p^2 : g^2 - p^2 :: mo : ou :: n' + r : r$; d'où l'on tire, $n' = \frac{2p^2}{g^2 - p^2}$, ce qui est l'expression du cosinus du petit angle saillant du noyau, laquelle est semblable à celle que nous avions trouvée pour n

(p. 305). Cette conformité entre les deux expressions est une suite de ce que chaque face du dodécaèdre, telle que *hls*, fait un angle droit avec la face soit du noyau, soit du rhomboïde hypothétique, située de l'autre côté de l'arête sur laquelle naît le décroissement qui donne *hls*.

40. On peut obtenir immédiatement la valeur de n', en égalant p au cosinus de la moitié de la plus petite incidence des faces du dodécaèdre; mais, dans ce cas, le calcul est beaucoup moins simple. Supposons que les faces dont il s'agit soient représentées par *dpf*, *qpf* (fig. 17). On aura (32, 2°.) $ek=p$,

ou $$\frac{n'}{n'-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n'+2}{3n'-3}\right)^2a^2+\frac{3}{4}g^2}}=p.$$

Elevant au carré, $$\frac{3n'^2a^2g^2}{(n'+2)^2a^2+12(n'-1)^2g^2}=p^2;$$

$$3n'^2a^2g^2=(n'+2)^2a^2p^2+12(n'-1)^2g^2p^2.$$

Substituant à la place de a^2 sa valeur $9p^2-3g^2$, et divisant tout par 3, puis réduisant,

$$n'^2+n'\frac{(4p^4-4g^2p^2)}{g^4-2g^2p^2+p^4}+\frac{4p^4}{g^4-2g^2p^2+p^4}=0.$$

Si l'on divise les deux termes de la fra[illegible]ti[illegible]ul-tiplie n', par g^2-p^2, on aura

$$n'^2-\frac{n'\times 4p^2}{g^2-p^2}+\frac{4p^4}{g^4-2g^2p^2+[illegible]}$$

Or, le pre[illegible]bre est un carré p[illegible]

racine est $n' - \frac{2p^2}{g^2-p^2}$. Donc $n' = \frac{2p^2}{g^2-p^2}$ comme ci-dessus.

41. Si l'on substitue cette valeur de n' dans le rapport de mx à bm (fig. 18), ou

$$(n'+1\sqrt{3p^2-g^2} : (n'-1)\sqrt{g^2+p^2},$$

qui a été trouvé plus haut, et qui donne l'incidence de deux faces adjacentes situées vers les deux sommets du dodécaèdre, on aura

$$mx : bm :: \left(\frac{2p^2}{g^2-p^2}+1\right)\sqrt{3p^2-g^2} : \left(\frac{2p^2}{g^2-p^2}-1\right)\sqrt{g^2+p^2}$$
$$:: (g^2+p^2)\sqrt{3p^2-g^2} : (3p^2-g^2)\sqrt{g^2+p^2}$$
$$:: \sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{3p^2-g^2}.$$

Or, ce rapport est celui de *ao* à *bo* (p. 285), comme cela doit être, puisque l'incidence dont nous avons parlé est égale à l'angle que font entre elles deux faces situées vers un même sommet du générateur, ainsi que nous l'avons déjà prouvé.

Lorsque $g=p$, on a $n' = \frac{2p^2}{0}$, ce qui signifie que la limite de la propriété dont il s'agit répond au cas où le noyau est un cube.

42. Les formules $n = \frac{p^2}{g^2-p^2}$ et $n' = \frac{2p^2}{g^2-p^2}$ sont susceptibles d'une infinité d'applications différentes, uivant les diverses valeurs que l'on peut supposer ur g et p. Mais parmi ces applications, les seules nissibles sont celles où les valeurs de n et de n'

n'excèdent pas la mesure des décroissemens ordinaires. Nous allons voir que quelques-uns des rhomboïdes obtus offerts par la nature se prêtent à cette condition, et qu'il existe même des cristaux secondaires, qui jouissent des propriétés que représentent les formules dont il s'agit.

Si l'on fait $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{2}$, comme dans la chaux carbonatée, on trouve $n = 2$ et $n' = 4$. Le premier de ces résultats a lieu dans une variété représentée (fig. 46, pl. 3), et dont j'ai développé plus haut la structure, à l'aide de la synthèse. Je l'appelle chaux *carbonatée métastatique*, c'est-à-dire de transport, parce que la loi dont elle dépend semble avoir transporté sur elle les angles de la forme primitive.

43. Si l'on substitue les valeurs précédentes de g et de p dans les formules relatives aux angles saillans du dodécaèdre, on trouve

$$fc : cz \text{ (fig. 17)} :: \sqrt{29} : \sqrt{3},$$

ce qui donne 144^{d} 20′ 26″ pour l'incidence de *fpd* sur *bpd*; et *de* : *ek* :: $\sqrt{5} : \sqrt{3}$, ce qui donne 104^{d} 28′ 40″ pour l'incidence de *fpd* sur *fpq*, la même que celle de *bafd* sur *agqf*, ainsi que cela doit être, d'après ce qui a été dit.

Ce dernier résultat nous fournit un moyen très simple pour avoir l'inclinaison de l'une quelconque *dpf* des faces du dodécaèdre sur celle qui lui est ad-



jacente, en dessous de l'arête *df*. Car cette inclinaison est égale à celle de *dpf* sur *dfqs*, plus à la différence entre cette dernière et celle de *bafd* sur *dfqs*. Or, l'inclinaison de *dpf* sur *dfqs* est de $104^d\,28'\,40''$, d'après ce qui a été dit. Celle de *bafd* sur *dfqs*, supplément de la précédente, est de $75^d\,31'\,20''$. La différence est donc $28^d\,57'\,20''$. Ajoutant cette différence à $104^d\,28'\,40''$, on trouve $133^d\,26'$ pour l'inclinaison cherchée.

41. Soit maintenant *bafd* (fig. 20) le même rhombe que fig. 17. Menons *by* qui coupe *af* en deux parties égales. Je dis que le triangle *bay* est semblable à l'un quelconque *dpf* (fig. 17) des triangles du dodécaèdre secondaire, de manière que les côtés de celui-ci sont doubles de ceux de l'autre.

Evaluons d'abord les trois côtés du triangle *pdf*. Nous avons, 1°. $df = \sqrt{g^2+p^2} = \sqrt{5}$.

2°. *dp* qui est la même ligne que fig. 16

$$= \sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2} = \sqrt{\tfrac{25}{9}\cdot 9+4} = \sqrt{29}$$

(voyez 32, 2°.).

3°. *pg* (fig. 16) = *pg* ou *pf* (fig. 17)

$$= \sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2} = \sqrt{\tfrac{16}{9}\cdot 9+4} = \sqrt{20}$$

(voyez 32, 2°.).

Evaluons pareillement les trois côtés du triangle *bay* (fig. 20).

1°. $ay = \frac{1}{2}af = \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{4}df$ (fig. 17).

2°. Ayant mené ym perpendiculaire sur bf (fig. 20), nous aurons

$$by = \sqrt{(bm)^2 + (my)^2} = \sqrt{(\frac{3}{4}bf)^2 + (\frac{1}{2}ac)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{9}{16}\cdot 12 + \frac{1}{4}\cdot 2} = \frac{1}{2}\sqrt{29} = \frac{1}{2}dp \text{ (fig. 17)}.$$

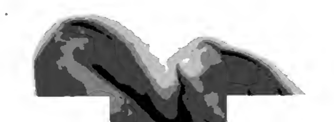
3°. ab (fig. 20) $= \sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \frac{1}{2}pf$ (fig. 17). Donc, etc.

On voit aussi que le moyen côté pf du triangle dpf est double du petit côté. Ces résultats sont particuliers à la chaux carbonatée métastatique.

42. Cette variété nous fournit encore le sujet d'un problème dont je donnerai dans la suite une autre solution. Il consiste à déterminer, d'après certaines données, le rapport entre les deux demi-diagonales g et p du noyau, ce qui permet ensuite de calculer les angles tant de ce noyau que des formes secondaires, avec une précision rigoureuse.

Choisissons pour données l'égalité observée entre les angles pfd et dfq (fig. 17), et la loi de décroissement par deux rangées, d'où résulte le cristal métastatique; ou, si on l'aime mieux, l'égalité entre la partie de l'axe de ce cristal qui excède celui du noyau de part et d'autre, et cet axe lui-même. Il s'agit, d'après ces deux données, de trouver le rapport entre g et p.

Pour y parvenir, j'observe que l'angle pfd étant égal à l'angle dfq, ou, ce qui revient au même, à



l'angle *baf*, les angles *dfk* et *dfa*, qui sont les supplémens des précédens, seront aussi égaux. Donc puisque *df* est égale à *af*, le sinus *dk* de l'angle *dfk* sera égal au sinus *am* (fig. 1) de l'angle *dfa* (fig. 17).

Or $am = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}}$.

Reste à trouver *dk*, pour mettre sa valeur en équation avec celle de *am*.

Le triangle *dek* est rectangle en *e*. Car le plan *dfs* étant perpendiculaire sur le plan *afs*, l'est aussi sur le plan *pfs* qui coïncide avec *afs*. Donc puisque *de* est en même temps couchée sur le plan *dfs* et perpendiculaire sur la commune section *fs* de ce plan avec *pfs*, elle sera aussi perpendiculaire sur ce dernier plan. Donc *ke* située sur le prolongement de *pfs*, et qui passe par le pied de *de* sera perpendiculaire sur cette dernière ligne. Donc le triangle *dek* est rectangle.

Donc $dk = \sqrt{(de)^2 + (ek)^2}$.

Or $de = g$. $ek = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{3}g^2}}$

(voyez 46). Et parce que $n = 2$,

$$ek = 2\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{(\frac{4}{3})^2a^2 + \frac{4}{3}g^2}} = \sqrt{\frac{3a^2g^2}{4a^2+3g^2}}.$$

Donc

$$dk = \sqrt{g^2 + \frac{3a^2g^2}{4a^2+3g^2}} = \sqrt{\frac{7a^2g^2+3g^4}{4a^2+3g^2}};$$

22..

Egalant les valeurs des carrés de *dk* et *am*,

$$\frac{7a^2g^2+3g^4}{4a^2+3g^2}=\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}.$$

Et substituant à la place de a^2 sa valeur $9p^2-3g^2$,

$$\frac{7g^2(9p^2-3g^2)+3g^4}{4(9p^2-3g^2)+3g^2}=\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}.$$

D'où l'on tire

$$\frac{7g^2p^2-2g^4}{4p^2-g^2}=\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2},$$

et faisant disparaître les deux dénominateurs, puis réduisant et transposant,

$$g^4-\tfrac{9}{2}p^2g^2=-\tfrac{9}{2}p^4.$$

Cette équation donne pour les deux valeurs de g^2,

$$g^2=\tfrac{3}{2}p^2,\ \text{et}\ g^2=3p^2,$$

Dans le premier cas, $g:p::\sqrt{3}:\sqrt{2}$, ce qui est le rapport cherché entre les deux demi-diagonales du rhombe primitif. Dans le second cas,

$$g:p::\sqrt{3}:1,$$

ce qui convient à l'hypothèse dans laquelle le noyau et le cristal secondaire se confondraient sur un même plan, qui serait un hexagone régulier.

43. Le résultat qui donne $n'=4$ est réalisé par la cristallisation dans plusieurs variétés de la même substance, et entre autres dans celle que je nomme *ascendante*. Mais comme les facettes qui en dépen-



dent sont combinées avec d'autres qui appartiennent à des lois différentes de décroissemens, je me réserve à faire connaître la variété dont il s'agit, lorsque je traiterai des formes secondaires composées.

Faisons $g=\sqrt{5}$ et $p=\sqrt{3}$, comme dans l'argent antimonié sulfuré; nous trouverons $n=\frac{3}{2}$, et $n'=3$. Je n'ai observé jusqu'ici aucun cristal qui offrît l'un ou l'autre de ces résultats; mais leur simplicité peut faire présumer que peut-être on les rencontrera dans quelqu'une des variétés qui seront découvertes dans la suite.

Lorsque $g=\sqrt{2}$, et $p=1$, on a $n=1$ et $n'=2$. L'incidence mutuelle de deux faces situées vers un même sommet sur le rhomboïde qui sert de noyau est alors de 120^d, et celle des faces produites par le décroissement, dans le cas de $n=1$, étant la même, il est facile d'en conclure qu'elles sont situées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier, et que le solide secondaire est semblable au dodécaèdre rhomboïdal représenté (fig. 21, pl. 2). Mais dans les dodécaèdres de cette forme, qui sont connus jusqu'à présent, toutes les faces sont à la fois ou primitives ou secondaires, et il est très probable qu'il en est de même de ceux qui existent encore à notre insu dans la nature. Ainsi le cas dont il s'agit est étranger à la cristallisation. Mais l'autre cas où $n'=2$ nous fournira dans la suite une application de la théorie à l'une des formes originaires du même dodécaèdre,

celui-ci pouvant être alors considéré comme un assemblage de quatre rhomboïdes, dont chacun subit le décroissement exprimé par $\overset{2}{D}$.

44. Le résultat $n=1$, que nous venons de voir être purement hypothétique, lorsque $g=\sqrt{2}$ et $p=1$, s'étend généralement à tous les rhomboïdes, quel que soit le rapport de g à p. Pour nous en convaincre, reprenons l'équation ap (fig. 16) $=\frac{1}{n-1}a$. Si l'on fait $n=1$, on aura $ap=\frac{a}{0}$, ce qui indique qu'alors l'axe devient une quantité infinie, et que par conséquent les plans produits par le décroissement sont verticaux, et disposés comme les faces latérales d'un prisme hexaèdre régulier. Il arrive alors que ces plans sont limités soit par des faces parallèles à celles du noyau, soit par d'autres faces dues à une loi différente de décroissement.

La première combinaison existe dans une variété de chaux carbonatée (fig. 21) que je nomme *prismée*, et dont le signe sera $\underset{P\ u}{P\overset{1}{D}}$. L'incidence de u sur u étant évidemment de 120^d, celle de P sur u sera le supplément de la moitié de l'angle que font entre elles deux faces situées vers un même sommet du noyau, c'est-à-dire qu'elle sera égale à

$$180^d - \frac{104^d\,28'\,40''}{2}, \text{ ou à } 127^d\,45'\,40''.$$

Dans une autre variété représentée (fig. 22), les faces *u*, *u* se combinent avec celles du rhomboïde équiaxe. Le signe représentatif est alors $\overset{1}{D}\underset{1}{B}$, et la variété prend le nom de *bisunitaire*. Mais on peut aussi supposer que son noyau soit semblable à l'équiaxe, et dans cette hypothèse elle résultera encore de la loi $\overset{1}{D}$. L'incidence de *g* sur *u*, prise d'après la même donnée que ci-dessus, est égale à

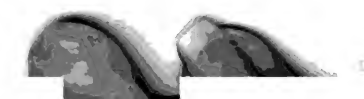
$$180^d - \frac{134^d\,25'\,38''}{2}, \text{ ou à } 112^d\,47'\,11''.$$

45. Nous avons vu que quand les décroissemens qui agissent sur les angles supérieurs d'un rhomboïde ont lieu par une rangée, il en résulte des faces perpendiculaires à l'axe, qui s'étendraient à l'infini, si elles n'étaient limitées par d'autres faces différemment situées. Dans plusieurs variétés qui appartiennent à diverses espèces, ces mêmes faces se combinent avec celles qui proviennent de la loi $\overset{1}{D}$, et qui sont parallèles à l'axe, en sorte que l'on a ici deux quantités dont la tendance vers l'infini est arrêtée par leurs positions respectives.

La forme dont il s'agit ici, et qui est celle du prisme hexaèdre régulier, existe dans l'espèce du corindon. La figure 23 représente le noyau de ce minéral, qui est un rhomboïde un peu aigu, dans lequel le rapport des diagonales *g*, *p*, est celui de $\sqrt{15}$ à $\sqrt{17}$, d'où il suit que l'incidence mutuelle

de deux faces prises vers un même sommet est de 86^{d}38′, et celle de deux faces situées de part et d'autre d'un même bord inférieur D de 93^{d}22′. On voit (fig. 24) le prisme hexaèdre produit par le concours des deux lois dont j'ai parlé, et (fig. 25) le même prisme dont trois angles solides situés alternativement au contour des bases sont remplacés par des facettes P parallèles aux faces primitives qui proviennent de ce que les décroissemens n'ont pas atteint leur terme. La première variété, qui est le *corindon prismatique*, a pour signe $\underset{o}{A}\underset{s}{\overset{1}{D}}$. Celui de la seconde, que j'appelle *corindon bisalterne*, est $\underset{o}{A}\underset{s}{\overset{1}{D}}\underset{P}{P}$. L'incidence de P sur *o* est de 122^{d}50′, et celle de P sur *s* est de 136^{d}41′. On conçoit, sans qu'il soit besoin d'en avertir, que le résultat donné par les deux lois $\underset{1}{A}$, $\overset{1}{D}$, est général pour tous les rhomboïdes, quelles que soient les mesures de leurs angles.

46. Pour citer encore un exemple des décroissemens sur les bords inférieurs, je prends la variété de chaux carbonatée représentée (fig. 81), et qui, par le prolongement des faces γ, γ, γ'', γ'', etc., devient un dodécaèdre à triangles scalènes analogue à celui que j'ai appelé *métastatique* (fig. 46, pl. 3), avec cette différence que le rhomboïde qui est censé lui être inscrit, est celui de 134$^d\frac{1}{2}$, auquel j'ai donné le nom d'*équiaxe*. Si nous adoptons



ce rhomboïde pour noyau, il est visible que le dodécaèdre résultera d'un décroissement sur ses bords inférieurs D, D. Ce décroissement est mixte, et a pour signe $\overset{\frac{5}{3}}{\underset{\gamma}{\mathrm{D}}}$.

Si l'on applique ici les formules qui ont été données (p. 324 et 325), en faisant $g=\sqrt{12}$, $p=\sqrt{5}$ et $n=\frac{5}{3}$, on trouve que le rapport de *de* à *ek*, ou du sinus de la moitié de l'incidence de γ sur γ, au cosinus, est celui de $\sqrt{185}$ à $\sqrt{75}$, ce qui donne $115^{d}\,1'\,44''$ pour l'incidence dont il s'agit; et que le rapport de *fc* à *cz*, ou du sinus de la moitié de l'incidence de γ sur γ' ou de γ'' sur γ'' au cosinus, est celui de $\sqrt{233}$ à $\sqrt{27}$, ce qui donne pour cette incidence, $142^{d}\,24'\,6''$. On trouvera aussi que celle de γ sur γ'' est de $118^{d}\,29'\,4''$. Dans tous les cristaux observés jusqu'ici (1), les sommets du dodécaèdre sont interceptés par des faces *g*, *g* (fig. 8), qui appartiennent au noyau supposé, et dont l'incidence sur les faces γ qui leur sont adjacentes est de $143^{d}\,32'\,39''$. Nous verrons reparaître dans la suite cette même variété, comme résultat d'un décroissement inter-

(1) M. Mabru, minéralogiste d'un mérite distingué, a découvert cette variété dans le département du Puy de-Dôme. Il avait très bien remarqué qu'elle présentait le rhomboïde équiaxe dont les bords inférieurs étaient remplacés chacun par un double biseau.

médiaire sur les angles latéraux du rhomboïde de $104^d \frac{1}{2}$.

47. Il existe des formes dans lesquelles les effets des décroissemens sur les bords supérieurs B se combinent avec ceux des décroissemens sur les bords inférieurs D. Or, j'ai trouvé que les intersections mutuelles des faces qui naissaient des deux décroissemens simultanés formaient un hexagone situé sur un plan perpendiculaire à l'axe, toutes les fois que le nombre de rangées soustraites sur B excédait d'une unité celui des rangées soustraites sur D, en sorte que cette propriété avait lieu pour un rhomboïde quelconque, indépendamment du rapport entre les demi-diagonales *g* et *p*.

Il est d'abord facile de voir que les intersections dont il s'agit ont leur origine aux angles latéraux E, E, du rhomboïde primitif. Cela posé, reprenons la figure 5, qui nous a servi pour la théorie des décroissemens sur les bords supérieurs B. D'après ce qui vient d'être dit, le point *x*, situé vis-à-vis du point *g*, qui est un des angles latéraux du rhomboïde primitif, sera le point d'intersection de l'arête *am* avec l'arête correspondante produite par le décroissement sur D. Maintenant, dans la figure 16, relative aux décroissemens sur les bords D, la ligne *pd* sera l'arête du dodécaèdre produit par ce genre de décroissement, laquelle en partant de l'angle *d* va rencontrer *am* (fig. 5). Si l'on prolonge *gn* (fig. 16) jusqu'à ce qu'elle coupe en *t* l'arête *pd*, le point *t*

devra se confondre avec le point x (fig. 5), c'est-à-dire que $nx = nt$. Soit n' le nombre de rangées soustraites relatif au décroissement sur B, et n celui qui se rapporte au décroissement sur D ; on aura

$$nx \text{ (fig. 5)} = \frac{n'+1}{2n'-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}. \text{ (Voy. 10, 2°.)}.$$

$$\text{Maintenant } ap \text{ (fig. 16)} = \frac{1}{n-1}\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

$$pr \text{ ou } ap + ar : dr :: pn : nt;$$

et substituant à la place des trois premiers termes leurs valeurs algébriques,

$$\left(\frac{1}{n-1}+\frac{2}{3}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} : nt.$$

Donc $nt = \frac{n+2}{2n+1}\sqrt{\frac{4}{3}g^2} = \frac{n'+2}{2n'-1}\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$. D'où l'on tire $n' = n+1$, comme nous l'avons annoncé.

Parmi les différentes lois de décroissemens qui déterminent les formes des variétés connues de chaux carbonatée, on en connaît huit, dont quatre ont pour expressions $\underset{2}{B}$, $\underset{3}{B}$, $\underset{4}{B}$, $\underset{6}{B}$, et les quatre autres $\overset{1}{D}$, $\overset{2}{D}$, $\overset{3}{D}$, $\overset{5}{D}$, ce qui donne les combinaisons suivantes $\overset{1}{D}\underset{2}{B}$, $\overset{2}{D}\underset{3}{B}$, $\overset{3}{D}\underset{4}{B}$, $\overset{5}{D}\underset{6}{B}$, qui toutes réalisent la propriété que je viens de démontrer. Mais jusqu'ici il n'y a que les deux lois représentées par la seconde, qui soient associées dans une même cristallisation ; les autres agissent solitairement dans

la production des formes qui en offrent les résultats. Je citerai pour exemple de la combinaison des deux lois dont il s'agit, la variété de chaux carbonatée que j'ai nommée *soustractive* (fig. 26), et dans laquelle les pans du prisme hexaèdre régulier interviennent avec les faces produites en vertu de ces lois. Son signe est $\underset{c}{\overset{2}{e}}\,\underset{r}{\overset{2}{D}}\,\underset{t}{\underset{3}{B}}$. Voici les mesures de ses angles, abstraction faite de ceux que font entre elles les faces du dodécaèdre métastatique, et que nous avons données plus haut. Incidence de *c* sur *r*, 135^d; de *c'* sur *r*, 152^d6′52″; de *t* sur *t*, 137^d39′26″; de *t* sur *t'*, 159^d11′34″. Je parlerai dans la suite d'un autre variété qui réunit aux faces *c*, *r*, *t* d'autres faces dues à un décroissement intermédiaire.

IV. *Décroissemens sur les angles latéraux.*

48. Les formes secondaires qui proviennent de cette espèce de décroissement sont en général des dodécaèdres, dans lesquels trois arêtes contiguës à chaque sommet sont parallèles aux diagonales obliques qui leur correspondent sur le noyau. C'est une suite nécessaire de ce que les soustractions se font par des rangées parallèles à ces mêmes diagonales.

49. Soit *ti* (fig. 27) un de ces dodécaèdres, et *to* l'une des arêtes parallèles aux diagonales du noyau. Soit *b* le point de l'arête *tk*, qui se confond avec l'angle solide latéral de ce noyau, ou qui est le point

de départ des décroissemens. Soit *bc* la demi-diagonale horizontale du rhombe sur lequel agissent les mêmes décroissemens. Menons *be* perpendiculaire sur *to*, et joignons les poiñts *c*, *e*, par une droite. Soit *bnm* le triangle mensurateur; désignons par g' la demi-diagonale horizontale de la molécule. Nous aurons $bn = 2ng'$. Quant à *nm*, elle coïncide avec la face latérale correspondante de la première lame de superposition, et de plus elle mesure la hauteur de cette face. Soit *as* (fig. 28) le noyau représenté séparément avec une position analogue à celle qu'il a dans l'intérieur du dodécaèdre. On concevra, avec un peu d'attention, que la face latérale dont nous venons de parler étant contiguë à une suite d'arêtes de molécule, situées parallèlement à *ag* et *ds*, doit être elle-même parallèle à la coupe principale qui passe par les points *a*, *d*, *s*, *g*. Et puisque *nm* (fig. 27) mesure la hauteur de cette face latérale, elle sera égale à la hauteur d'une molécule, ou à la ligne *ak* (fig. 2), en supposant que *adsg* représente la coupe principale de la molécule. Donc nous aurons

$$nm\,(\text{fig. } 27) = \sqrt{\frac{3g'^2p'^2 - g'^4}{p'^2}}\ (\text{v. } 6,\ 3^\circ.).$$

Donc

$$bn : nm :: 2gn : \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}} :: 2n : \sqrt{\frac{3p^2 - g^2}{p^2}},$$

en substituant g à g' et p à p', parce que les dimensions de la molécule sont proportionnelles à celles du noyau.

50. Cherchons maintenant les incidences respectives des faces du dodécaèdre, en commençant par celle de *pto* (fig. 27) sur *kto*.

Il est facile de voir que l'angle *bec* est égal à la moitié de cette incidence, et parce que l'angle *bce* est droit, les deux triangles *bnm*, *bce*, sont semblables.

Donc

$$bc : ce :: bn : nm :: 2gn : \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}} :: 2n : \sqrt{\frac{3p^2 - g^2}{p^2}}.$$

Avant de chercher la seconde incidence, ou celle de *otk* sur *rth*, déterminons la partie de l'axe du dodécaèdre, qui excède de chaque côté de l'axe du noyau.

Soit *adsg* (fig. 29) la coupe principale de ce noyau, *to* une arête du cristal secondaire parallèle à la diagonale *ad*, et *io* l'arête inférieure contiguë à la précédente. Du point *a* et du milieu *c* de *ad*, menons *ax* et *ce* perpendiculaires l'une et l'autre sur *to*.

Les triangles semblables *axt*, *aks* donnent

$$ak : as :: ax = ce : at.$$

Or, $ak = \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}}$. $as = \sqrt{9p^2 - 3g^2}$. *ce* étant la même ligne que fig. 27, nous avons

$$bc = g : ce :: 2gn : \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}}.$$

Donc $ce = \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}}.$

Ainsi la proportion deviendra

$$\sqrt{\frac{3g^2p^2-g^4}{p^2}} : \sqrt{9p^2-3g^2} :: \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{3g^2p^2-g^4}{p^2}}$$

$$: at = \frac{1}{2n}\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Supposons un plan *oyr* (fig. 27) perpendiculaire à l'axe. Soient *oty*, *rty* (fig. 30) les portions des triangles *otk*, *rtk* (fig. 27) interceptées par ce plan. Soit de plus *tn* la partie correspondante de l'axe, que nous supposerons égale à *tn* (fig. 29). Ayant mené *on*, *rn* et *yn* (fig. 30), nous aurons *yn* égale à *gn* (fig. 29), et *on* ou *rn* (fig. 30) égale à *nl* (fig. 29), ou au prolongement de *gn* jusqu'à la rencontre de *to*.

Menons *oz* (fig. 30) perpendiculaire sur *ty*, *op* perpendiculaire sur *ny*, puis joignons les points *z*, *p*, par une droite. L'angle *ozp* sera la moitié de celui qui mesure l'incidence de *otk* (fig. 27) sur *rtk*. Cherchons le sinus *op* (fig. 30) et le cosinus *pz* de l'angle *ozp*.

1°. Pour *op*. A cause de l'angle $onp = 60^d$ et de l'angle droit *opn*, $op = on\sqrt{\frac{3}{4}}$. Cherchons *on* ou son égale *nl* (fig. 29). Les triangles semblables *adr*, *tln* donnent

$$ar : dr :: tn : nl :: at + an : nl.$$

Ou $$\frac{2}{3}\sqrt{a^2} : \sqrt{\frac{4}{3}g^2} :: \left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{a^2} : nl$$

$$= \frac{2n+3}{2n}\sqrt{\frac{1}{3}g^2} = on.$$

Donc $op = \frac{2n+3}{2n}\sqrt{\frac{1}{3}g^2} \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2n+3}{4n}\sqrt{g^2}$.

2°. Pour pz. Les triangles semblables tny, pzy (fig. 30) donnent $ty : tn :: py : pz$.

$$tn = \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{a^2} = \frac{2n+3}{6n}\sqrt{a^2}.$$

$$ty = \sqrt{tn^2 + yn^2} = \sqrt{\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 a^2 + \frac{4}{3}g^2}.$$

$$py = yn - pn = yn - \tfrac{1}{2}on = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} - \frac{2n+3}{4n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}$$

$$= \left[2 - \left(\frac{2n+3}{4n}\right)\right]\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} = \frac{6n-3}{4n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}.$$

Donc la proportion $ty : tn :: py : pz$ devient

$$\sqrt{\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n+3}{6n}\sqrt{a^2} :: \frac{6n-3}{3n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}$$

$$: pz = \frac{\frac{(2n+3)(6n-3)}{4n.6n}\sqrt{\frac{1}{3}a^2g^2}}{\sqrt{\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 a^2 + \frac{4}{3}g^2}}$$

Comparant op avec pz, on trouvera

$$op : pz :: \sqrt{\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{2n}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}.$$

51. Les cristaux de chaux carbonatée et ceux de tourmaline fournissent des exemples de l'espèce de décroissement dont il s'agit ici. Mais les facettes qui en dépendent se trouvent combinées, dans ces cristaux, avec d'autres dont la détermination se rapporte à des lois qui ne seront démontrées que dans la

suite. Pour citer un exemple qui ne suppose rien que de connu, je choisirai la variété de fer oligiste représentée (fig. 31), et que je nomme *unisénaire*. Son signe, qui est $\underset{P}{P}\overset{1}{\underset{o}{A}}\underset{g}{E^{66}E}$, indique que sa surface est composée de six pentagones P parallèles aux faces du noyau (fig. 32), de deux triangles équilatéraux *o* (fig. 31), qui remplacent les sommets du même noyau, et résultent d'un décroissement par une rangée sur les angles A (fig. 32), et de douze triangles scalènes *g*, *g*, etc. (fig. 31), disposés deux à deux à la place des angles solides E, E (fig. 32), et produits par des soustractions de six rangées sur les mêmes angles. Le rapport entre les demi-diagonales *g* et *p* du noyau étant, comme je l'ai dit plus haut, celui de $\sqrt{9}$ à $\sqrt{10}$, on trouvera d'abord l'incidence de *o* sur P (fig. 31), en prenant le supplément de l'angle *tln* (fig. 29), ou de son égal *acn*, d'après le rapport entre *cn* et *an*, qui est celui de *g* à $\sqrt{3p^2-g^2}$, ou de $\sqrt{9}$ à $\sqrt{21}$. Cette incidence est de 123^d 14'. Maintenant les formules relatives aux faces *g*, *g* (fig. 31), donnent d'une part

$$bc\ (\text{fig. } 27) : ce :: \sqrt{120} : \sqrt{7},$$

en faisant attention que $n=3$; et d'une autre part,

$$op\ (\text{fig. } 30) : pz :: \sqrt{333} : \sqrt{175}.$$

D'après la première, l'angle $bec = 76^d\,25'$; ajoutant 90^d, on a 166^d 25', pour l'incidence de *g* sur P

(fig. 31). D'après la seconde, *ozp* (fig. 30)$=54^d 3'$; doublant cet angle, on a $108^d 6'$, pour l'incidence de *g* sur *g*.

53. A mesure que la loi du décroissement varie, trois des arêtes longitudinales contiguës à chaque sommet, telles que *to*, *tr*, etc. (fig. 27), conservent la même inclinaison par rapport à l'axe, puisqu'elles sont constamment parallèles aux diagonales obliques du noyau, tandis que les trois arêtes intermédiaires *tp*, *tk*, etc., changent continuellement d'obliquité à l'égard de l'axe, en restant fixes, par les points *b*, *f*, etc., qui sont les termes de départ du décroissement. Supposons que les choses étant dans l'état que présente la figure, la loi du décroissement devienne plus rapide; les arêtes *to*, *tr*, se rapprocheront des faces du noyau, en sorte qu'elles iront couper le prolongement de l'axe dans un point situé en dessous de *t*; d'où il suit que les arêtes *tp*, *tk*, etc., feront avec l'axe des angles plus ouverts. Supposons au contraire que la loi du décroissement devienne moins rapide; les arêtes *to*, *tr*, s'écarteront des faces du noyau, en sorte qu'elles rencontreront le prolongement de l'axe au-dessus de *t*, et ainsi les angles que font avec le même axe les arêtes *tp*, *tk*, se trouveront diminués. Il y a donc un terme où les six arêtes contiguës à l'axe étant également inclinées, les arêtes latérales *po*, *ok*, *kr*, etc., se trouvent sur un même plan perpendiculaire à l'axe, de manière que le solide prend la forme d'un dodécaèdre com-

posé de deux pyramides droites réunies par leurs bases. Cherchons si ce résultat peut être produit par une loi régulière de décroissement.

Il est évident que, dans ce cas, *gn* (fig. 29) $= nl$, ou $\sqrt{\frac{4}{3}g^2} = \frac{2n+3}{2n}\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$, ce qui donne $n = \frac{3}{2}$; c'est-à-dire que le décroissement a lieu par trois rangées.

54. On connaît une variété de corindon que je nomme *ternaire*, et qui offre ce résultat dans toute sa simplicité. La figure 33 la représente, et l'on voit (fig. 23, pl. 16) le rhomboïde qui est sa forme primitive. Les incidences des faces *r*, *'r* (fig. 33), situées vers un même sommet étant toutes égales entre elles, il suffit, pour les déterminer, d'employer une des deux formules trouvées précédemment. Si l'on choisit la première, comme la plus simple, c'est-à-dire celle qui donne le rapport de *bc* à *ce* (fig. 27), et que l'on fasse $g = \sqrt{15}$, $p = \sqrt{17}$, $n = \frac{3}{2}$, on aura $128^d\, 14'$, pour l'incidence de *r* sur *r*. Quant à celle de *r* sur *r'*, on la trouvera, en faisant attention que la ligne menée du centre de la base commune des deux pyramides à l'un des angles, est à la hauteur de l'une ou l'autre pyramide comme *ln* : *tn* (fig. 29), ou comme *cn* : *an*. Or $cn = \sqrt{\frac{1}{3}g^2} = \sqrt{5}$, $an = \frac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2} = \sqrt{12}$. D'après ces données, l'incidence de *r* sur *r'* est de $121^d\, 34'$.

55. Dans la variété de fer oligiste appelée *trapézienne*, et que l'on voit figure 34, l'effet de la même

loi se combine avec celui de la loi qui donne des faces perpendiculaires à l'axe, en sorte que le signe rapporté au noyau (fig. 32) est $E^{33}EA$. L'incidence
$n \quad \overset{1}{o}$

de *o* sur *n* est de $119^d\,34'$; celle de *n* sur *n* est de $128^d\,26'$, et celle de *n* sur *n'*, de $120^d\,52'$.

Une autre variété de la même substance, que l'on voit fig. 35, et que j'appelle *binoternaire*, a pour signe $PE^{33}EA$. Elle diffère de la variété birhomboïdale
$P \quad n \quad \overset{2}{s}$

(fig. 12, pl. 15) déjà décrite plus haut, par l'addition des facettes *n*, *n* (fig. 35), qui tendent à produire le dodécaèdre pyramidal. L'incidence de P sur *n* est de $154^d\,13'$.

Cette forme est celle que présentent le plus communément les cristaux de la célèbre mine de fer de l'île d'Elbe. Elle avait été regardée par Stenon (1) et par Romé de l'Isle (2), comme n'étant autre chose qu'un cube diversement tronqué sur ses angles solides. Dans cette opinion, que j'avais d'abord suivie moi-même, les incidences des faces additionnelles sur les faces P, calculées d'après les lois qu'indique le signe représentatif, offraient des différences assez légères avec les véritables pour échapper à l'attention. Par exemple, l'incidence de P sur *n* se trouvait de $154^d\,45'$ au lieu de $154^d\,13'$, et parce que les

(1) Collection académ., partie étrangère, t. IV, p. 400.

(2) Cristallogr., t. III, p. 189 et suiv.



cristaux de l'île d'Elbe sont situés ordinairement dans leurs groupes, de manière qu'il est plus aisé de mesurer les inclinaisons des faces secondaires sur les primitives, que celles de ces dernières l'une sur l'autre, je m'étais cru dispensé de cette seconde mesure, et il semblait que le gonyomètre ne dût rien m'apprendre à cet égard que ce qu'on savait d'avance. Je fus tiré d'erreur par diverses considérations (1), et entre autres par celle d'une espèce d'anomalie qu'offrirait, dans le cas présent, la forme cubique, en faisant la fonction de rhomboïde, de manière qu'il faudrait concevoir un axe passant par deux angles solides opposés, qui devraient être considérés comme sommets; et les lois de décroissement qui agiraient autour de ces sommets seraient différentes de celles qui se rapporteraient aux angles latéraux. Ayant rencontré enfin des cristaux sur lesquels deux faces P situées vers un même sommet se prêtaient à la mesure immédiate de leur incidence mutuelle, je trouvai que celle-ci n'était que d'environ 87^d au lieu de 90^d, et cette observation, que j'ai répétée depuis un grand nombre de fois, fit rentrer la cristallisation du fer de l'île d'Elbe dans l'analogie des rhomboïdes, et prouva que la nature ne cessait point ici d'être d'accord avec elle-même.

Quelquefois les faces *g*, *g* (fig. 31), s'ajoutent à

(1) Voyez le Traité de Minéral., t. IV, p. 49 et suiv., première édition.

celles de la variété qui vient d'être décrite, comme on le voit (fig. 36), en sorte que le signe devient $PE^{66}EE^{33}EA$. C'est alors le fer oligiste *additif*. Inci-
$P \quad g \quad n \quad \overset{2}{s}$
dence de P sur g, 166^{d} 25′, et de g sur n, 167^{d} 48′.

56. Si l'on fait varier les inclinaisons respectives des faces produites par un décroissement sur les angles latéraux, de manière que celles qui répondent à r, r, ou à r', r' (fig. 33), et se réunissent deux à deux sur des arêtes x, z, contiguës aux angles E, e' (fig. 23, pl. 16) du rhomboïde primitif, fassent entre elles des angles toujours plus ouverts, il y aura un cas où elles coïncideront sur un même plan, et alors le dodécaèdre se trouvera converti en rhomboïde. A ce terme le cosinus pz (fig. 30) de l'angle ozp s'évanouit. Reprenant donc l'expression analytique de pz (*voyez* p. 152), et supprimant tout de suite son dénominateur, nous aurons

$$(2n+3)(6n-3)\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2g^2}=0,$$

ou simplement, $6n-3=0$; d'où l'on tire $n=\frac{1}{2}$, ce qui indique que le cas dont il s'agit a lieu indifféremment pour tous les rhomboïdes, en vertu d'un décroissement par une seule rangée de molécules.

Cherchons d'abord en général le rapport entre les deux demi-diagonales g' et p' du rhomboïde secondaire. La ligne ot (fig. 29) étant l'arête de ce rhomboïde, si l'on mène oz perpendiculaire sur l'axe, on

aura

$$oz : tz :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} :: 2g' : \sqrt{3p'^2 - g'^2}.$$

D'une autre part, *ot* étant parallèle à *ad*, on aura
$oz : tz :: dr : ar :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2} :: g : \sqrt{3p^2 - g^2}$.

Or,

$$at = \frac{1}{2n}\sqrt{9p^2 - 3p^2} = \sqrt{9p^2 - 3g^2},$$ à cause de $n = \tfrac{1}{2}$.

Donc l'axe du noyau est le tiers de celui du rhomboïde secondaire. Donc $\sqrt{3p^2 - g^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3p'^2 - g'^2}$.
Donc aussi $g = \tfrac{1}{3} . 2g'$, et $g' = \tfrac{3}{2}g$.

Si dans l'équation précédente on met $\tfrac{9}{4}g^2$ à la place de g'^2, elle devient

$\sqrt{3p^2 - 3g^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3p'^2 - \tfrac{9}{4}g^2}$, ou $27p^2 - 9g^2 = 3p'^2 - \tfrac{9}{4}g^2$.

Donc $9p^2 - 3g^2 = p'^2 - \tfrac{3}{4}g^2$; d'où l'on tire,

$$p' = \tfrac{3}{2}\sqrt{4p^2 - g^2}.$$

57. Si l'on fait $g = \sqrt{3}$ et $p = \sqrt{2}$, on trouve

$$g' : p' :: \sqrt{3} : \sqrt{5}.$$

Ce résultat a lieu dans une variété de chaux carbonatée que j'ai nommée *inverse*, et dont j'ai développé plus haut la structure à l'aide de la méthode synthétique.

C'est à cette même variété que se rapportent les rhomboïdes connus sous le nom de *grès cristallisé de Fontainebleau*, et qui, selon les expériences de

M. Sage, contiennent environ $\frac{3}{5}$ de matière quarzeuse sur $\frac{2}{5}$ de chaux carbonatée. La formation de ces rhomboïdes, dont plusieurs sont isolés et parfaitement prononcés, offre un exemple remarquable de la grande puissance de la cristallisation. Ils ont été produits dans des cavités où la matière du grès, par l'effet d'une cause quelconque, avait subi dans sa contexture un relâchement qui l'avait réduite à l'état de sable. Un liquide chargé de chaux carbonatée, amené par l'infiltration dans ces cavités, a pénétré à travers les interstices des grains quarzeux, et les molécules calcaires ont ensuite enveloppé et saisi ces mêmes grains, sans rien déranger, en même temps qu'elles prenaient, relativement les unes aux autres, des positions conformes aux lois d'une aggrégation régulière, en sorte que les grains quarzeux n'ont fait qu'interrompre la continuité de la structure, en laissant subsister son mécanisme.

De plus, lorsque la matière calcaire rencontrait dans le sable un espace vide, elle y formait des cristaux purs et transparens, que l'on trouve quelquefois accolés à ceux qui sont mélangés de quarz. Il y a même des cristaux qui ont une partie à l'état de pureté et l'autre à celui de mélange, sans que ce défaut d'homogénéité ait nui au niveau des faces, non plus qu'à la direction des joints naturels que l'on suit de l'œil dans les deux parties, lorsqu'on fait mouvoir à la lumière les fractures des cristaux dont il s'agit.

58. Si l'on suppose toujours que le rapport des

demi-diagonales du rhomboïde primitif soit celui de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{2}$, on prouve que le rhomboïde secondaire qui en dérive, à l'aide de la loi E''E, a cette propriété remarquable, que ses angles plans sont égaux aux incidences respectives du rhomboïde primitif, et réciproquement. De plus, les angles plans de la coupe principale sont les mêmes de part et d'autre.

Reprenons les formules relatives à ces trois espèces d'angles (6, 1°., 2°. et 3°.).

1°. Pour l'angle plan aigu,

$$r : \text{cosin.} :: g^2+p^2 : \pm g^2 \mp p^2.$$

2°. Pour la plus petite incidence des faces,

$$r : \text{cosin} :: 2p^2 : \pm g^2 \mp p^2.$$

3°. Pour l'angle aigu de la coupe principale,

$$\text{sin} : \text{cosin} :: \sqrt{3g^2p^2 - g^4} : \pm g^2 \mp p^2.$$

Or, si l'on fait $g=\sqrt{3}$, $p=2$, comme dans le rhomboïde primitif, et que l'on prenne les signes supérieurs, le premier rapport devient 5 : 1 ; le second, 4 : 1 ; et le troisième, 3 : 1.

Et si l'on fait $g=\sqrt{3}$, $p=\sqrt{5}$, comme dans le rhomboïde secondaire, et que l'on prenne les signes inférieurs, le premier rapport devient 4 : 1 ; le second, 5 : 1 ; et le troisième, 3 : 1. Donc il y a identité relativement au troisième angle, et à l'égard des deux autres il y a inversion, ce qui a suggéré le nom de *chaux carbonatée inverse*, que j'ai donné à cette

variété. Je prouverai dans la suite qu'il y a pour chaque rhomboïde une loi particulière de décroissement qui dépend du rapport entre g et p, et dont le résultat est un rhomboïde secondaire qui jouit des mêmes propriétés.

59. Il existe une variété de fer oligiste que j'appelle *fer oligiste soustractif*, qui est représentée (fig. 37), et qui parmi ces différentes faces en a six désignées par u, u, etc., et produites en vertu de la loi $E^{11}E$. Son signe rapporté au noyau (fig. 32) est $\overset{1}{D}PE^{33}EE^{11}EA$. Incidence de k sur n, 150^d 26′;
$\;\;k\;P\;\;n\;\;\;\;u\;\;\overset{2}{s}$
de P sur u, 128^d 29′.

Il est remarquable que les faces u, u' soient des rhombes, quoique les faces k, k, d'une part, et n, n, de l'autre, dont les intersections avec les faces u, u', déterminent les figures de celles-ci, aient des inclinaisons différentes. Ce résultat, dont la cristallisation offre divers exemples, dépend de certaines conditions que je vais faire connaître.

Soient opn, lnp (fig. 38.), deux faces triangulaires ou de toute autre figure, qui aient entre elles des inclinaisons quelconques, pourvu qu'elles soient également inclinées sur le plan onl; et ozn, lzn, deux autres faces réunies aux premières sur les arêtes on, ln, et qui peuvent de même être inclinées entre elles de telle quantité qu'on voudra, pourvu qu'elles le soient également sur le plan onl. Ayant mené nt qui divise en deux parties égales l'angle onl, je prends

sur l'une ou l'autre des arêtes *np*, *nz*, par exemple sur la première, un point quelconque *s*, et de ce point je mène sur *nt* la ligne *sg* parallèle à l'autre arête *nz*, puis ayant divisé en deux la ligne *ng*, je mène par le point *c* de division la ligne *scy* jusqu'à la rencontre de *nz*, et par cette dernière ligne je fais passer un plan *sryu*, dont la section *ru* avec le plan *onl* est perpendiculaire sur *ng*. Je dis que ce plan est un rhombe. Car les triangles *ncy*, *gcs*, sont semblables et égaux, puisque d'une part les angles *scg*, *ycn*, *cgs*, *cny*, sont égaux deux à deux, et que d'une autre part $cg = cn$ par la construction. Donc $cs = cy$. De plus, il est aisé de voir que $cr = cu$. Donc les diagonales *sy*, *ru*, étant perpendiculaires l'une sur l'autre, il en résulte que les côtés *rs*, *ry*, *su*, *yu*, sont égaux entre eux, et que la face *sryu* a la figure d'un rhombe.

Imaginons maintenant que les diverses faces représentées par la figure 38 prennent de telles positions relatives, que *psro*, *psul*, deviennent parallèles à n'', n'' (fig. 37), *oryz*, *luyz* (fig. 38), parallèles à k'', k'' (fig. 37), et *sryu* (fig. 38), parallèle à u' (fig. 37), il est évident que le plan *onl* deviendra perpendiculaire sur les faces *oryz*, *luyz*, et que la section *ru* du plan *sryu* sur le plan *onl* sera toujours perpendiculaire à la ligne *nt*. Si en même temps *sg* devient parallèle à *nz*, elle sera aussi perpendiculaire sur *nt*. Reste à prouver que, dans cette hypothèse, on a $cg = \frac{1}{2} gn$.

Supposons que la construction de la figure 29 se rapporte à l'effet de la loi $E^{13}E$, qui donne les faces n'', n'' (fig. 37), auquel cas

$$at \text{ (fig. 29)} = \frac{1}{2n}\sqrt{9p^2 - 3g^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}\,;$$

la ligne tp (fig. 29) sera parallèle à l'arête γ (fig. 37), et en même temps à la ligne pn (fig. 38), et l'on aura

$$ng : gs :: pr \text{ (fig. 21)} : tr :: gn : nt :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : an + at$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Supposons d'une autre part que la construction de la figure 29 se trouve ramenée à l'effet de la loi $E^{11}E$ qui donne la face u' (fig. 37), auquel cas

$$at \text{ (fig. 29)} = \sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

La ligne tp deviendra alors parallèle à la face u' (fig. 37), et en même temps à la ligne cs (fig. 38), et l'on aura,

$$cg : gs :: pr \text{ (fig. 29)} : tr :: gn : nt :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : an + at$$
$$= \tfrac{4}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2} :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Comparant cette proportion avec la précédente, on en conclura que cg (fig. 38) $= \tfrac{1}{2}gn$, ce qu'il fallait prouver. Donc la position de la face u' (fig. 37) remplit les conditions requises pour que cette face ait la figure d'un rhombe.

60. Je terminerai cet article par la solution d'un

problème qui a beaucoup d'analogie avec un autre que j'ai résolu précédemment, et dont le sujet était une série de rhomboïdes engendrés les uns par les autres à l'aide du décroissement $\underset{1}{B}$. substituons à ce décroissement celui qui a pour signe E''E, et supposons que chaque rhomboïde de la série soit susceptible de naître du précédent, en vertu de la loi que représente ce signe. Désignant toujours par g et p les demi-diagonales de l'un d'eux qui soit compris entre les extrêmes, et auquel nous donnons le nom de générateur, nous aurons de même deux séries, l'une descendante, composée de rhomboïdes plus petits que le générateur, l'autre ascendante, composée de ceux qui ont de plus grandes dimensions.

Soient γ et π les demi-diagonales d'un rhomboïde du rang r, pris dans la série ascendante. D'après ce qui a été dit plus haut (56), si $r=1$, on a $\gamma=\frac{3}{2}g$; si $r=2$, on a $\gamma=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}g=(\frac{3}{2})^2g$; si $r=3$, on a $\gamma=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot g=(\frac{3}{2})^3g$. En général, $\gamma=(\frac{3}{2})^rg$, et $\gamma^2=(\frac{9}{4})^rg^2$.

De plus, lorsque $r=1$, l'axe du rhomboïde secondaire est triple de celui du noyau (56). Donc, dans ce cas,

$$\sqrt{3\pi^2-\gamma^2}=3\sqrt{3p^2-g^2}, \text{ ou } 3\pi^2-\gamma^2=9(3p^2-g^2).$$

Lorsque $r=2$, $\sqrt{3\pi^2-\gamma^2}=3\,.\,3\sqrt{3p^2-g^2}$, ou $3\pi^2-\gamma^2=9\cdot9(3p^2-g^2)$. En général,

$$3\pi^2-\gamma^2=9^r(3p^2-g^2). \text{ Mais } \gamma^2=(\tfrac{9}{4})^rg^2.$$

Donc $3\pi^2-(\frac{9}{4})^r g^2=9^r(3p^2-g^2.)$

$3\pi^2=9^r(3p^2-g^2)+(\frac{9}{4})^r g^2;\ \pi^2=9^r(p^2-\frac{1}{3}g^2)+\ldots$

$=9^r\left(p^2-\frac{1}{3}g^2+\frac{1}{3.4^r}g^2\right)=9^r(p^2+\frac{1}{3.4^r}g^2-\ldots$

$=9^r\left(p^2+\frac{1-4^r}{3.4^r}g^2\right)$. Donc $\pi=3^r\sqrt{p^2+\frac{1-\ldots}{3.4\ldots}}$

Désignons par γ', π', les demi-diagonales d... rhomboïde du rang r', pris dans la série descenda... Si $r=1$, on aura $\gamma'=\frac{2}{3}g$; si $r=2$, on aura $\gamma'=\frac{2}{3}.\ldots$ En général, $\gamma'=(\frac{2}{3})^r g$, et $\gamma'^2=(\frac{4}{9})^r g^2$. De plus, si $r=\ldots$ on aura

$\sqrt{3\pi'^2-\gamma'^2}=\frac{1}{3}\sqrt{3p^2-g^2}$, ou $3\pi'^2-\gamma'^2=\frac{1}{9}(3p^2-g\ldots$

Si $r=2$, on aura $\sqrt{3\pi'^2-\gamma'^2}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}\sqrt{3p^2-g\ldots}$

ou $$3\pi'^2-\gamma'^2=\frac{1}{9\cdot 9}(3p^2-g^2).$$

En général, $3\pi'^2-\gamma'^2=\frac{1}{9^r}(3p^2-g^2)$.

Mais $$\gamma'^2=(\tfrac{4}{9})^r g^2.$$

Donc, $$3\pi'^2-(\tfrac{4}{9})^r g^2=\frac{1}{9^r}(3p^2-g^2).$$

Donc,

$$\pi'=\sqrt{\frac{1}{9^r}(p^2-\tfrac{1}{3}g^2)+(\tfrac{4}{9})^r\tfrac{1}{3}g^2}=\frac{1}{3^r}\sqrt{p^2-\tfrac{1}{3}g^2+4^r\cdot\tfrac{1}{3}g^2}$$

$$=\frac{1}{3^r}\sqrt{p^2+\frac{4^r-1}{3}g^2}.$$

61. Si l'on compare les formules précédentes avec celles que nous avons obtenues pour les rhomboïdes

ui naissent du décroissement $\underset{1}{\mathrm{B}}$, on verra que celles ui sont données par les séries ascendantes ou des-endantes sont les mêmes de part et d'autre, à la ifférence près du facteur 3^r ou $\frac{1}{3^r}$, qui multiplie les ormules auxquelles nous venons de parvenir, et qui est nul dans les autres. On concevra la raison de cette différence, en faisant attention que dans le cas du décroissement $\underset{1}{\mathrm{B}}$, l'axe est le même pour tous les rhomboïdes des deux séries, au lieu que dans le cas du décroissement E''E, l'axe croît ou décroît suivant que les rhomboïdes appartiennent à une série ou à l'autre. A l'égard de l'identité qui existe d'ailleurs entre les formules données par les deux espèces de décroissement, elle provient de ce que le même rhomboïde qui est produit par tel autre, en vertu du décroissement $\underset{1}{\mathrm{B}}$, peut à son tour en produire un semblable à ce dernier, à l'aide du décroissement E''E, ou réciproquement. Ainsi, pour nous borner aux rhomboïdes connus jusqu'ici, savoir, ceux que j'ai nommés *équiaxe, primitif et inverse,* et qui appartiennent à la chaux carbonatée, on trouvera que l'équiaxe qui naît du primitif, par le décroissement $\underset{1}{\mathrm{B}}$, peut le produire par le décroissement E''E, et que l'inverse qui dérive du primitif, par le décroissement E''E, peut lui donner naissance par le décroissement $\underset{1}{\mathrm{B}}$.

62. Il existe une variété de chabasie représentée

(fig. 39), que j'ai nommée *trirhomboïdale*, parce qu'elle résulte de la combinaison de trois rhomboïdes analogues à ceux dont je viens de parler. Dans la forme primitive de cette substance, que l'on voit (fig. 40), et qui est un rhomboïde légèrement obtus, le sinus de la moitié de la plus grande inclinaison des faces est au cosinus, comme $\sqrt{8} : \sqrt{7}$, ce qui donne le rapport de $\sqrt{17}$ à $\sqrt{15}$, pour celui des demi-diagonales g et p du rhombe (1). On jugera des fonctions relatives des trois rhomboïdes, à l'aide du signe qui est PBE''E. Incidence de P sur P, 93d 48';
P n r
de P sur n, 136d 54'; de r sur n, 143d 59'.

V. *Décroissemens sur l'angle inférieur.*

63. Ces décroissemens ont de l'analogie avec ceux qui agissent sur l'angle supérieur, soit parce qu'ils

---

(1) Soit *abcd* (fig. 41) la coupe transversale du rhomboïde primitif. Ayant mené les diagonales *ac*, *ad*, et la ligne *br* perpendiculaire sur *ad*, et qui sera le cosinus de l'angle aigu *bad*, en prenant *ba* pour le rayon, on aura par l'hypothèse $ao = \sqrt{8}$, et $bo = \sqrt{7}$. Donc ab ou $ad = \sqrt{15}$.

$$br = \frac{bo \cdot ac}{ad} = \sqrt{\frac{7 \cdot 32}{15}};\ ar = \sqrt{ab^2\ br^2} = \sqrt{15 - \frac{224}{15}} = \sqrt{\frac{1}{15}}.$$

Donc $ab : ar :: \sqrt{15} : \sqrt{\tfrac{1}{15}} :: 15 : 1.$

Mais (6) $ab : ar :: 2p^2 : g^2 - p^2.$

Donc $2p^2 : g^2 - p^2 :: 15 : 1.$ D'où l'on tire, $g : p :: \sqrt{17} : \sqrt{15}.$





roduisent en général des rhomboïdes, soit parce u'ils peuvent avoir lieu directement ou par renversement, en sorte que tantôt les faces produites s'inclinent vers la partie supérieure de l'axe, et tantôt lles se rejettent en sens contraire vers la partie inférieure. Occupons-nous d'abord des décroissemens lirects.

Soit toujours *adsg* (fig. 42) la coupe principale du noyau, et soit *pm* la diagonale oblique du rhomboïde secondaire, et *mu* l'arête inférieure contiguë à cette diagonale. Le triangle mensurateur *dho* ne différera point de celui que nous avons considéré (p. 321) dans le cas des décroissemens sur les bords inférieurs (fig. 16), et nous aurons encore ici,

$$dh \text{(fig. 42)} : oh :: 2np : \sqrt{g^2 + p^2}.$$

Seulement le nombre de diagonales soustraites qui était égal au nombre de rangées soustraites dans le cas précédent, indiquera un nombre double de rangées soustraites. Nous aurons aussi, en suivant la même marche pour le calcul,

$$ap = \frac{1}{n-1}\sqrt{9p^2 - 3g^2}. \text{ (Voyez 31.)}$$

Cherchons les expressions des deux diagonales γ et π du rhomboïde secondaire.

Ayant mené *mz* perpendiculaire sur *pu*, nous aurons les triangles semblables *drp*, *mzp*, qui donnent

$$dr : pr :: mz : pz;$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \left(\tfrac{2}{3}+\frac{1}{n-1}\right)\sqrt{9p^2-2g^2},\ \text{ou}\ \frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{9p^2-3g^2}$$

$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{2}{3}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\sqrt{9p^2-3g^2},\ \text{ou}\ \tfrac{2}{3}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Donc

$$g : \gamma :: \frac{2n+1}{3n-3} : \tfrac{2}{3}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) :: 2n+1 : 2n+2,\ \text{et}\ \gamma = \frac{2n+2}{2n+1}g.$$

Maintenant *pu* ou

$$\sqrt{9\pi^2-3\gamma^2} = \left(1+\frac{2}{n-1}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} = \frac{n+1}{n-1}\sqrt{9p^2-3g^2};$$

Et à cause de $\gamma^2 = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 g^2$,

$$9\pi^2 - 3\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 g^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2(9p^2-3g^2).$$

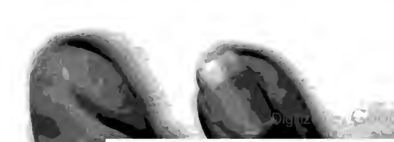
D'où l'on tire

$$\pi = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2\left(p^2-\tfrac{1}{3}g^2\right) + \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2}$$

$$= (n+1)\sqrt{\left(\frac{1}{n-1}\right)^2\left(p^2-\tfrac{1}{3}g^2\right) + \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2}.$$

64. Cherchons de suite les valeurs des quantités qui, dans les décroissemens inverses, correspondent aux précédentes.

1°. Pour la partie de l'axe du rhomboïde secondaire qui excède celui du noyau; soit *ou* (fig. 43) une des diagonales obliques du premier, et *op* l'arête



adjacente; d'où l'on voit que *ou* répondra à une arête *ds* du noyau, et *op* à une diagonale oblique *ad*. Soit *dhe* le triangle mensurateur, dans lequel

$$dh : eh :: 2np : \sqrt{g^2+p^2}.$$

Ayant mené *al* prolongement de *ad*, nous aurons les triangles semblables *pal*, *psg*, qui donnent

$$gs : as+ap :: al : ap.$$

Or, $gs=2p. \quad as=\sqrt{9p^2-3g^2}.$

Reste à trouver *al*. Les triangles semblables *gal*, *dhe*, donnent $eh : dh :: ga : al.$

Ou $\sqrt{g^2+p^2} : 2np :: \sqrt{g^2+p^2} : al=2np.$

Donc la proportion $gs : as+ap :: al : ap$ devient

$$2p : \sqrt{9p^2-3g^2}+ap :: 2np : ap.$$

D'où l'on tire, en désignant par a la valeur de l'axe *as*,

$$ap=\frac{n}{1-n}a=us.$$

2°. Pour les diagonales du rhomboïde secondaire, que nous désignerons par γ', π'; la ligne *oz* étant une perpendiculaire sur l'axe *pu*, les triangles semblables *ozu*, *dru*, donneront $dr : ur :: oz : uz$,

ou $$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \left(\tfrac{1}{3}+\frac{n}{1-n}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma'^2}$$
$$: \tfrac{2}{3}\left(1+\frac{2n}{1-n}\right)\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Et simplifiant, $g : 2n+1 :: \gamma' : 2n+2$.

Donc, $$\gamma' = g \cdot \frac{2n+2}{2n+1}.$$

Maintenant,

$$\sqrt{9\pi'^2 - 3\gamma'^2} = \left(1 + \frac{2n}{1-n}\right)\sqrt{9p^2 - 3g^2} = \frac{n+1}{1-n}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Mais $$\gamma'^2 = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 g^2.$$

Donc

$$9\pi'^2 - 3\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 g^2 = \left(\frac{n+1}{1-n}\right)^2 (9p^2 - 3g^2).$$

D'où l'on tire

$$\pi' = (n+1)\sqrt{\left(\frac{1}{1-n}\right)^2\left(p^2 - \tfrac{1}{3}g^2\right) + \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2}.$$

65. Il existe entre les résultats des deux modes de décroissemens que nous considérons ici, une relation semblable à celle que nous ont offerte les décroissemens qui agissent sur l'angle supérieur; c'est-à-dire que les mêmes rhomboïdes qui résultent d'un décroissement direct sur l'angle inférieur, peuvent aussi être produits en vertu d'un décroissement inverse sur le même angle. Pour trouver une formule à l'aide de laquelle étant donnée la loi relative à l'un des rhomboïdes, on puisse connaître celle d'où dépend l'autre, continuons de désigner par n le nombre de diagonales soustraites par le décroissement direct, et nommons n' celui qui se rapporte au décroissement inverse. Il est



facile de voir que la similitude de forme entre les deux rhomboïdes dépend de la condition que *ur* (fig. 43) soit égale à *pr* (fig. 42). Donc

$$\frac{2n'+1}{3-3n'}\sqrt{9p^2-3g^2}=\frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{9p^2-3g^2},$$

ou simplement

$$\frac{2n'+1}{1-n'}=\frac{2n+1}{n-1},$$

d'où l'on tire

$$n=\frac{n'+2}{4n'-1},\quad \text{et}\quad n'=\frac{n+2}{4n-1}.$$

66. Ici revient la même propriété qui a lieu pour les décroissemens sur l'angle supérieur, c'est-à-dire que les deux formules indiquent les mêmes fonctions réciproques entre n et n', en sorte que l'on peut aussi choisir l'une d'elles à volonté, par exemple la première, ou $n=\frac{n'+2}{4n'-1}$, pour en déduire la solution des deux espèces de problèmes. De plus, si l'on compare cette formule avec celle qui se rapporte aux décroissemens sur l'angle supérieur, et qui est

$$n=\frac{2-n'}{4n'+1},$$

on voit qu'elle n'en diffère qu'en ce que les quantités renfermées dans le second membre sont affectées de signes contraires. On peut donc réunir les deux valeurs de n en une seule, qui aura la forme suivante

$$n=\frac{2\mp n'}{4n'\pm 1},$$

les signes supérieurs devant être employés dans le cas des décroissemens sur l'angle A, et les inférieurs dans celui des décroissemens sur l'angle *e*. Ayant déjà quelques-uns des résultats relatifs aux signes supérieurs, suivons la formule dans ses applications à de nouveaux problèmes.

67. Si en continuant d'employer les mêmes signes, on fait $n'=2$, n devient zéro, et l'on a un résultat que j'ai déjà indiqué plus haut (p. 320) : c'est-à-dire que *adsg* (fig. 44) étant toujours la coupe du noyau, et ao' étant la diagonale oblique du rhomboïde produit par le décroissement direct, celle du rhomboïde qui résulte du décroissement inverse coïncide avec l'arête *ag*.

Si l'on fait n' plus grand que 2, la valeur de n devient négative. La diagonale oblique du rhomboïde produit par le décroissement direct ayant alors une position telle que ao'', située en dessous de ao', celle du rhomboïde donné par le décroissement inverse, tend à s'abaisser en dessous de *ag*, en prenant une position telle que ax', elle sera située comme la diagonale oblique d'un rhomboïde qui naîtrait d'un décroissement inverse sur l'angle e' (fig. 45), et il est évident que ce rhomboïde est semblable à celui dont ao'' (fig. 44) représente la diagonale oblique. Alors la marche du décroissement au lieu d'être descendante, en allant de *a* vers *x*, comme dans les cas précédens, devient ascendante en allant de *g* vers *p*, et c'est ce qu'indique le signe négatif. La

valeur de n, prise avec le signe positif, est la même que celle qu'on aurait obtenue, en cherchant immédiatement la loi du décroissement inverse sur l'angle e' (fig. 45), d'où résulte un rhomboïde semblable à celui qui est produit par le décroissement direct sur A, et dont ao'' (fig. 44) est la diagonale oblique.

Il est facile de vérifier cette analogie, en considérant que dans le cas dont nous venons de parler, on a $gn : np$ (fig. 43) ou $dr : ur :: mu$ (fig. 5, pl. 15) : au. Or, lorsque dans la formule trouvée ci-dessus, savoir,

$$n = \frac{2 - n'}{4n' + 1},$$

on fait n' plus grand que 2, cette quantité se rapporte à un décroissement inverse. Désignant donc par n' la loi du décroissement qui détermine le rapport mu à au (fig. 5), et par n celle du décroissement d'où dépend le rapport dr à ur (fig. 43), nous aurons

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n+1}{3-3n}\sqrt{9p^2-3g^2} :: (n'+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n'-1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2};$$

ou

$$1 : \frac{2n+1}{1-n} :: n'+1 : 2n'-1.$$

D'où l'on tire

$$n = \frac{n'-2}{4n'+1}.$$

Or, si dans cette formule on substitue à n' telle valeur numérique que l'on voudra, le résultat sera

le même que celui auquel on parviendrait si dans la première formule $n = \frac{2 - n'}{4n' + 1}$ on égalait n' à la même valeur, et que l'on prît le résultat avec un signe contraire (1).

68. Ainsi la formule $n = \frac{2 - n'}{4n' + 1}$ indique par elle-même les cas où le décroissement inverse qui répond à celui dont la loi est n' agit, non plus sur le même angle supérieur A (fig. 45), mais sur l'angle inférieur e' de la face opposée à P, et de plus elle donne la loi du décroissement dont il s'agit.

Si l'on suppose n' infini, les faces produites étant censées se confondre avec celles du noyau, le rhomboïde correspondant, qui naît du décroissement inverse, sera semblable à ce même noyau; alors les nombres 2 et 1 s'évanouissent devant les quantités infinies n' et $4n'$, et l'on a $n = -\frac{1}{4}$, c'est-à-dire que le décroissement qui donne ce résultat remarquable a lieu par deux rangées en hauteur sur l'angle e' (fig. 45).

---

(1) Supposons par exemple que la substitution d'une valeur numérique à n' dans la formule $n = \frac{2 - n'}{4n' + 1}$ conduise à un résultat négatif, ce qui est le cas que nous considérons ici. Soit $\frac{2 - n'}{4n' + 1} = -a$. Si l'on rend a positif, le premier membre devient $\frac{n' - 2}{4n' + 1}$, qui dans l'autre formule donne la valeur de n.

Nous reviendrons bientôt sur ce même résultat, pour en faire des applications à des variétés prises dans diverses espèces.

69. Considérons maintenant la formule relativement aux signes inférieurs, et servons-nous des résultats qui se déduisent de leur usage, pour comparer et lier entre elles les propriétés renfermées dans les formules particulières qui se rapportent les unes aux décroissemens directs sur l'angle *e* (fig. 45), les autres à ceux qui agissent par renversement sur les mêmes angles.

Si l'on fait $n = 1$, dans l'expression $\frac{1}{n-1}a$ de ap (fig. 42), on a $ap = \frac{1}{0}a$; c'est-à-dire qu'alors l'axe étant infini, les faces produites lui sont parallèles et disposées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier. D'une autre part, si l'on égale aussi n à l'unité dans l'expression $\frac{na}{1-n}$ de us (fig. 43), on trouve pareillement $us = \frac{1}{0}a$. Les deux décroissemens se trouvent alors parvenus à une limite passé laquelle les lignes mp (fig. 42) et du (fig. 43) se rejettent l'une et l'autre en sens contraire, de manière que le décroissement direct se change en un décroissement inverse, et *vice versâ*.

La formule $n = \frac{2 \mp n'}{4n' \pm 1}$ prise avec les signes inférieurs indique l'identité des deux résultats précédens; car si l'on fait $n' = 1$, on trouve $n = \frac{3}{3} = 1$. Je citerai bientôt divers exemples analogues à ce paral-

lélisme entre les faces produites et l'axe dı
et dans lesquels ces faces se trouvent lim
d'autres, qui sont dues à des lois différente
croissement.

70. Si dans le rapport trouvé plus haut
expressions des diagonales γ et π des rhoı
secondaires produits par des décroissemens
sur *e* (fig. 45), on fait $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{2}$,
auquel cas le décroissement a lieu par trois r
en largeur, on aura $\gamma = \frac{5}{4}\sqrt{3}$, et $\pi = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{5}{4}$
Donc $\gamma : \pi :: \sqrt{3} : \sqrt{17}$.

Il existe une variété de chaux carbonatée r
sentée (fig. 46), qui réalise ce résultat. J'y rev
drai plus bas, pour en démontrer une prop
remarquable, d'où j'ai tiré le nom de *contrastan*
qu'elle porte dans la méthode.

71. Si dans la formule $n = \frac{2 \mp n'}{4n' \pm 1}$, on contin
d'employer les signes inférieurs, et que l'on substit
à la place de n' la fraction $\frac{2}{3}$ relative à la variété don
je viens de parler, on trouve $n = \frac{7}{10}$, qui indique un
rhomboïde semblable à cette variété, et produit en
vertu d'un décroissement sur l'angle *e* (fig. 45), par
sept rangées en largeur et par cinq rangées en hau-
teur. Les faces de ce rhomboïde existent parmi celles
d'une variété de chaux carbonatée que je nomme
imitative, et que je ferai connaître dans la suite. Les
deux solutions du problème se trouvent ici réalisées
par la cristallisation.

1. Si n' devient infini, alors les quantités 2 et 1 ıt nulles, on a $n=\frac{1}{4}$, d'où l'on conclura que la ne secondaire qui naît du décroissement par deux gées en hauteur est semblable au noyau. Ce ré- tat est le même que celui auquel nous sommes rvenus plus haut, en faisant n' infini dans la for- ule employée avec les signes supérieurs, avec la fférence que dans ce dernier résultat, la valeur de n t affectée du signe négatif, parce que le décroisse- ıent auquel elle se rapporte prend une marche op- osée à celle qu'il suivait dans les cas où la valeur lont il s'agit était positive.

On peut démontrer immédiatement l'identité de forme qui a lieu dans le cas que nous venons de considérer, entre le rhomboïde secondaire et le noyau, d'après l'observation que dans le cas présent,

$$dr : ur \text{ (fig. 43) } :: dr : ar.$$

Donc $\quad ur = ar$, et $us = rs = \frac{1}{3}a$.

Donc $\quad \frac{n}{1-n}a = \frac{1}{3}a$, ou $\frac{n}{1-n} = \frac{1}{3}$,

ce qui donne $n = \frac{1}{4}$, comme ci-dessus.

La chaux carbonatée, le quarz, la tourmaline et le fer oligiste, offrent des exemples de cette reproduction du noyau, comme forme secondaire. Je me bornerai ici à en citer un, qui est tiré de la première de ces substances; c'est celui qui existe dans la variété *trihexaèdre*, représentée fig. 47, et dont le signe

rapporté à la forme primitive (fig. 45) est $\underset{c}{\overset{2}{e}}\underset{P}{P}\underset{\epsilon}{\overset{\frac{1}{5}}{e}}$. Les faces ϵ qui proviennent du décroissement par deux rangées en hauteur ayant la même inclinaison que les faces P du véritable noyau, produisent en se combinant avec elles, deux pyramides droites hexaèdres, séparées par les pans c, c' qui appartiennent au prisme hexaèdre régulier. L'incidence de P ou de ϵ sur c est de 135^d, et celle de P sur ϵ est de 140^{d}37′34″.

72. Si dans la formule $n = \frac{2 \mp n'}{4n' \pm 1}$, prise toujours avec les signes inférieurs, on fait $n' = \frac{1}{4}$, on trouve $n = \frac{2}{0}$, c'est-à-dire que n à son tour devient infini, comme cela doit être, d'après ce qui a été dit plus haut. La diagonale oblique du rhomboïde relatif à n se confondant alors avec da (fig. 44), qui est celle du noyau, si l'on fait n' plus petit que $\frac{1}{4}$, la nouvelle diagonale du rhomboïde correspondant tend à descendre au-dessous de da, en prenant une position telle que dp''. Maintenant, si l'on mène ao'' parallèle à dp'', elle sera située comme la diagonale oblique d'un rhomboïde produit par un décroissement inverse sur l'angle e (fig. 45), et il est clair que ce rhomboïde est semblable à celui dont dp'' (fig. 44) est censée représenter la diagonale oblique. Ce résultat est analogue à celui que nous a déjà offert la même formule prise avec les signes supérieurs (67). La valeur qui s'en déduit pour n est néga-

tive, parce que la marche du décroissement au lieu d'être ascendante, en allant de d vers p, comme dans les cas précédens, devient descendante, en allant de a vers o''. Cette valeur de n, prise avec le signe positif, indique de même la loi qui produit un rhomboïde semblable à celui que donne n', et l'on pourrait la trouver immédiatement par un calcul analogue à celui que nous avons employé (p. 375) pour le cas relatif aux signes supérieurs.

73. Lorsque n' devient zéro, on a $n = -2$. Alors le rhomboïde auquel n' se rapporte étant semblable à celui qui naît d'un décroissement par une rangée sur les bords supérieurs du noyau, celui qui est indiqué par n résulte d'un décroissement par quatre rangées sur les angles supérieurs. Nous avons obtenu le même résultat, en sens inverse, à l'aide de la formule employée avec les signes supérieurs, en faisant $n' = 2$, ce qui a donné $n = 0$.

Lorsque n' est plus petit que $\frac{1}{4}$, les faces du rhomboïde qui naît du décroissement inverse sont plus inclinées à l'axe que les faces primitives; d'où il suit que le décroissement direct, qui produit l'analogue du rhomboïde dont il s'agit, se trouve transporté sur l'angle supérieur. Continuons de désigner par n l'exposant de ce dernier, et cherchons deux formules qui donnent n en fonction de n', et réciproquement. Pour les obtenir, il faut égaler le rapport entre mu et au (fig. 5, pl. 15) à celui qui a lieu entre dr et ur (fig. 43). Nous aurons donc $mu : au :: dr : ur$,

ou,

$$(n+1 \sqrt{\tfrac{4}{36}g^2} : \frac{2n-1}{3}a :: \sqrt{\tfrac{4}{36}g^2} : \frac{2n'+1}{3-3n'}a.$$

Et en simplifiant,

$$3n+3 : 2n-1 :: 3-3n' : 2n'+1 ;$$

ou $$n+1 : 2n-1 :: 1-n' : 2n'+1 ;$$

d'où l'on tire

$$n' = \frac{n-2}{4n+1}, \quad \text{et} \quad n = \frac{2+n'}{1-4n'}.$$

74. Reprenons maintenant les applications des formules qui nous ont donné séparément les propriétés des rhomboïdes produits par les décroissemens soit directs soit inverses, sur les angles inférieurs du noyau.

Lorsque n égale $\frac{1}{2}$, dans le décroissement direct, on trouve, en appliquant ici les formules de la p. 372,

$$\gamma' : \pi' :: {}^3g : \tfrac{3}{2}\sqrt{4p^2 - g^2}.$$

Or, ce rapport est le même que celui des demi-diagonales du rhomboïde produit par le décroissement E¹E, comme cela doit être, puisqu'alors les trois décroissemens qui agissent autour d'un même angle solide latéral du noyau, ont lieu par une rangée. Ainsi le résultat qui donne le rhomboïde dont il s'agit est à la fois le premier terme de la série des décroissemens directs sur les angles latéraux, et de celle des décroissemens inverses sur les angles in-

férieurs. Le rhomboïde qui correspond à ce double emploi, dans la chaux carbonatée, est celui que j'ai appelé *inverse*.

75. Nous avons déjà dans la variété trihexaèdre (fig. 47) un exemple des combinaisons de lois, à l'aide desquelles les faces parallèles à l'axe, qui par elles-mêmes sont infinies, s'associent d'autres faces qui en limitent l'étendue. Une des formes les plus communes, en ce genre, est celle du prisme hexaèdre régulier, nommé *chaux carbonatée prismatique* (fig. 37, pl. 3), dont le signe est $\overset{2}{\underset{c}{e}}\underset{\underset{o}{1}}{A}$. Dans une autre variété que l'on rencontre de même assez fréquemment, et qui est représentée (fig. 29, pl. 2), les faces additionnelles appartiennent au rhomboïde équiaxe. Cette variété, que j'appelle *chaux carbonatée dodécaèdre*, a pour signe $\overset{2}{\underset{c}{e}}\underset{\underset{g}{1}}{B}$; incidence de g sur c', $116^{d}\,33'\,55''$.

Quelquefois les pans de la variété prismatique se trouvent doublés, par l'intervention de la loi $\overset{1}{D}$, qui, combinée avec la loi $\underset{1}{A}$, est de même susceptible de produire le prisme hexaèdre régulier. On a, dans ce cas, la chaux carbonatée *péridodécaèdre* (fig. 48), dont le signe est $\overset{2}{\underset{c}{e}}\overset{1}{\underset{u}{D}}\underset{\underset{o}{1}}{A}$, et dans laquelle chaque pan fait un angle de 150^{d} avec les deux qui lui sont adjacens.

76. La réunion des faces du prisme hexaèdre ré-

gulier avec celles du rhomboïde inverse, dans une autre variété de la même substance, que l'on voit (fig. 49), donne naissance à une propriété géométrique, qui est particulière à cette variété, en ce qu'elle dépend du rapport $\sqrt{3}$ à $\sqrt{5}$ entre les demi-diagonales. Nous supposons ici la forme cristalline ramenée à sa limite, de manière que les faces *f*, *f*, qui appartiennent au rhomboïde inverse soient des trapèzes. Cela posé, la propriété dont il s'agit consiste en ce que les deux angles obtus *a'*, *a'*, ainsi que les aigus *a*, *a*, sont situés d'un même côté, au lieu que sur le rhomboïde ils sont opposés. Il en résulte que les angles du rhomboïde inverse persistent malgré les nouveaux plans qui modifient la forme, ce qui m'a suggéré le nom de *persistante* que j'ai donné à cette variété. Le signe est $\underset{c}{\overset{2}{e}}\underset{f}{E^{\prime\prime}}\underset{\overset{1}{o}}{E}A$. Incidence de *f* sur *c*, 153d 26′6″.

Il est facile de démontrer la propriété qui caractérise cette même variété. Soit *as* (fig. 50) le rhomboïde inverse. Je mène *kh*, *hl*, par les milieux des côtés *bg*, *bc*, *cd*, puis *hn* et *kn*, de manière que l'on ait $bn = \frac{1}{4} ab$. Je mène ensuite *lt* de manière que l'on ait aussi $td = \frac{1}{4} ad$, puis la ligne *nt*, qui sera parallèle à la diagonale *bd*, et enfin les lignes *hp*, *lr*, perpendiculaires sur *nt*.

Nous avons, par la construction, $by = \frac{1}{4} bs$, et $bn = \frac{1}{4} ab$. Donc *ny* est parallèle à l'axe *as*. Donc

le plan *knh* est parallèle au plan *c* (fig. 49). Donc, puisque *lt* (fig. 50) est inclinée en sens contraire de la même quantité que *hn*, il en résulte que le rhombe *abcd* est coupé de la même manière par les lignes *hn*, *lt*, que le rhombe dont *f* (fig. 49) est censé faire partie, l'est par les lignes $a'a$, $a'a$. D'une autre part, les lignes *nt*, *hl* (fig. 50) étant parallèles aux lignes *aa*, $a'a'$ (fig. 49), il en résulte que le trapèze *ntlh* (fig. 50) est semblable au trapèze *f* (fig. 49).

Soient g', p' les demi-diagonales du rhombe *abcd* (fig. 50). Nous aurons $hl = \frac{1}{2}bd = g$, et *hm* ou

$$pu = \frac{1}{2}bx = \frac{1}{2}g'.$$

Mais à cause de $an = \frac{3}{4}ab$, nous avons aussi

$$un = \frac{3}{4}bx = \frac{3}{4}g'.$$

Donc *pn* ou $un - pu = \frac{1}{4}g'$. Maintenant,

$$hp = hz + pz = mx + ux = \frac{1}{2}p' + \frac{1}{4}p' = \frac{3}{4}p'.$$

Donc

$$hp : pn :: \tfrac{3}{4}p' : \tfrac{1}{4}g' :: 3p' : g' :: 3\sqrt{5} : \sqrt{3} :: \sqrt{15} : 1.$$

Donc $hn : pn :: 4 : 1$, rapport qui est le même que celui qui a été trouvé plus haut (p. 361), entre le sinus total et le cosinus du petit angle plan du rhomboïde inverse. On aura donc a' (fig. 49) $= 104^{d}28'40''$, et $a = 75^{d}31'20''$.

77. J'ajouterai ici la description de deux rhom-

boïdes de chaux carbonatée, produits par des décroissemens en hauteur sur l'angle e, et qui tantôt constituent des variétés simples, et tantôt entrent dans des combinaisons d'où résultent des variétés composées.

Le premier, que j'appelle *chaux carbonatée mixte* (fig. 51), a pour signe $\overset{\frac{3}{4}}{e}$. Faisant donc $n = \frac{3}{4}$, dans les expressions des demi-diagonales (64), on trouve

$$\gamma' = \tfrac{7}{5}\sqrt{3} \text{ et } \pi' = \tfrac{7}{5}\sqrt{26}.$$

Donc

$$\gamma' : \pi' :: \sqrt{3} : \sqrt{26},$$

ce qui donne pour l'incidence de s sur s, $62^d 44' 53''$; pour celle de s sur s', $116^d 15'$; et pour les angles plans, $37^d 31' 4''$ et $142^d 28' 56''$.

Cette variété unie à la forme primitive et à celle du rhomboïde contrastant, produit une forme composée, représentée (fig. 52) que j'ai nommée *chaux carbonatée trirhomboïdale*. Son signe est $\underset{s}{\overset{\frac{3}{4}}{e}}\,\underset{m}{\overset{3}{e}}\,\underset{P}{P}$. Incidence de P sur m, $149^d 2' 11''$; de P sur s, $119^d 2' 11''$; de m sur s', ou de m' sur s, $154^d 39' 13''$; de m sur s, ou de m' sur s', $121^d 32' 54''$.

Le second rhomboïde se présente à l'œil sous une forme si voisine du cube, qu'on l'avait d'abord appelé *spath calcaire cubique*. Nous verrons bientôt que ses angles mesurés avec précision diffèrent sensiblement de ceux du cube. Mais avant de déterminer la

loi qui donne ce rhomboïde, j'exposerai un résultat dont il m'a fourni le sujet, et qui prouve la possibilité qu'un rhomboïde dont la différence avec la forme cubique serait très-légère, soit produit par une loi admissible de décroissement, comme forme secondaire de la chaux carbonatée. Je suppose que la loi dont il s'agit ait lieu sur l'angle inférieur *e*. Pour qu'elle donne le résultat indiqué, il faut que l'on ait *dr* : *ur* (fig. 43) à très peu près comme $1 : \sqrt{2}$, ce rapport étant celui qui existe dans le cube, entre la demi-perpendiculaire sur l'axe et la partie de cet axe qu'elle intercepte, ou entre $\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$ et $\frac{1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}$. Or, $1:\sqrt{2}$ presque comme $1:1,4$ ou comme $5:7$. Adoptant donc ce dernier rapport, nous aurons

$$dr : ur :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \left(\frac{1}{3}+\frac{n}{1-n}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} :: 5 : 7;$$

ou,

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n+1}{3-3n}\sqrt{9p^2-3g^2} :: 5 : 7.$$

Et en faisant $g = \sqrt{3}$ et $p = \sqrt{2}$,

$$2 : \frac{2n+2}{3-3n}.3 :: 5 : 7;$$

ou

$$2 : \frac{2n+1}{1-n} :: 5 : 7.$$

D'où l'on tire, $n = \frac{3}{8}$.

Cherchons, d'après cette valeur, le rapport entre les demi-diagonales γ' et π' du rhomboïde secon-

daire, nous aurons

$$\gamma':\pi'::\frac{2n+2}{2n+1}g:(n+1)\sqrt{\left(\frac{1}{1-n}\right)^2(p^2-\tfrac{1}{3}g^2)+\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2\tfrac{4}{3}g^2}$$
$$::\sqrt{75}:\sqrt{74},$$

ce qui donne $90^d\,23'$, au lieu de 90^d, pour l'incidence de deux faces voisines autour d'un même sommet.

On pourrait, en conservant la même loi, obtenir une forme secondaire exactement cubique, au moyen d'une légère altération dans les angles de la forme primitive. Dans ce cas, on a

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{2n+1}{3-3n}\sqrt{9p^2-3g^2}::1:\sqrt{2}.$$

Et mettant à la place de n sa valeur $\frac{3}{8}$,

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\tfrac{14}{15}\sqrt{9p^2-3g^2}::1:\sqrt{2};$$

ou, $$\tfrac{1}{3}g^2:\tfrac{49}{225}(9p^2-3g^2)::1:2.$$

D'où l'on tire, $99g^2=147p^2$, et $g:p::\sqrt{147}:\sqrt{99}$.

Ce rapport donne $104^d\,2'$ pour la plus grande incidence des faces du rhomboïde primitif. Or, cette incidence mesurée avec soin est sensiblement plus grande; et ainsi, en mettant dans l'observation des angles la précision convenable, on reconnaîtrait encore que l'aspect de la forme n'offrirait qu'une fausse ressemblance. Au reste, il ne serait pas impossible que des variétés relatives à des espèces très-distinguées d'ailleurs l'une de l'autre, ne se rapprochassent tellement par leurs formes extérieures, que la diffé-



rence échappât aux mesures mécaniques. Mais ces analogies qui par elles-mêmes sembleraient répandre du vague dans la considération des formes cristallines, serviraient à mieux prouver les avantages et la fécondité de la théorie, lorsqu'elle nous découvrirait des structures et des lois particulières cachées sous une identité apparente, et propres à faire ressortir nettement ce corps que l'œil abandonné à lui-même serait tenté de confondre.

78. M. Smithson, célèbre minéralogiste anglais, s'étant procuré des cristaux de la variété qui nous occupe ici, reconnut bientôt que c'étaient des rhomboïdes aigus dans lesquels la plus petite inclinaison des faces n'était que d'environ 88^d. De plus, il remarqua que le rhomboïde se divisait par des coupes qui, en partant des sommets, interceptaient les arètes situées comme *op* (fig. 43), en faisant des angles égaux avec les faces adjacentes à ces arêtes, ce que l'on concevra aisément, par l'inspection de la fig. 53, qui représente le rhomboïde et son noyau inscrit. Cette observation lui indiqua que le décroissement qui donnait ce rhomboïde agissait dans le sens de la hauteur sur l'angle inférieur du noyau, et le calcul lui fit connaître que l'on avait dans ce cas $n = \frac{4}{5}$, c'est-à-dire que le décroissement se faisait par quatre rangées en largeur et par cinq en hauteur.

Si l'on cherche d'après cette donnée le rapport entre les demi-diagonales du rhomboïde secondaire, on trouve $\gamma' : \pi' :: \sqrt{12} : \sqrt{13}$, ce qui donne

considérer la chose sous un point de vue général, et démontrer qu'un rhomboïde quelconque dont on suppose les demi-diagonales représentées par *g* et *p*, est susceptible de produire, à l'aide d'une loi de décroissement, qui dépend du rapport entre *g* et *p*, un autre rhomboïde dont telle est la forme, que ses angles plans sont égaux aux angles saillans du rhomboïde générateur, que réciproquement ses angles saillans sont égaux aux angles saillans du générateur, et que les coupes principales des deux rhomboïdes ont les mêmes angles.

Ces deux conditions, dont l'une consiste dans l'inversion des angles plans et saillans des deux rhomboïdes, et l'autre dans l'égalité des angles des coupes principales, sont tellement liées entre elles, que l'une étant supposée, l'autre en devient une suite nécessaire. C'est ce que je vais prouver en prenant pour donnée la seconde condition.

Soient *adsg*, *aosl* (fig. 54), les coupes des deux rhomboïdes qui doivent être telles que l'on ait ..... *ads*=*oal*, et par conséquent *dag*=*aos*. Je donne ici, pour plus de simplicité, un axe commun aux deux rhomboïdes, parce que si l'on suppose ces axes inégaux, la démonstration reste la même.

J'observerai ici que l'un des deux rhomboïdes est nécessairement obtus et l'autre aigu. C'est une suite de ce que le grand angle *oal* de l'une des coupes est situé au sommet du rhomboïde auquel celle-ci appartient, tandis que dans l'autre coupe le petit angle *dag*,



qui est égal au supplément du premier, correspond de même au sommet du rhomboïde auquel cette coupe se rapporte.

Soient g, p les demi-diagonales du rhomboïde aigu dont la coupe est *adsg*, et g', p', celles du rhomboïde obtus dont la coupe est *aosl*; *ds* sera l'arête du premier, *os* celle du second, et *ad*, *ao*, seront les diagonales obliques. Or, les triangles *asd*, *lxa*, sont semblables par une suite de ce que les angles *ads*, *lax* sont égaux, et de ce que les perpendiculaires *dr*, *an*, menées des sommets sur les bases, divisent celles-ci en deux parties dont l'une est double de l'autre (1).

---

(1) Supposons deux triangles *bic* (fig. 55), et *xzy* (fig. 56), tracés d'après les conditions que les angles *bci* et *xyz* soient égaux, et que les perpendiculaires *ct* (fig. 55), *yq* (fig. 56), abaissées de ces angles sur les bases, divisent ces dernières en deux parties *ti*, *bt* (fig. 55), et *qz*, *xq* (fig. 56), qui soient entre elles dans un même rapport exprimé par $\frac{m}{n}$. Je dis que les deux triangles sont semblables. Pour le prouver, concevons que le triangle *xzy* (fig. 56) se superpose sur le triangle *bic* (fig. 55), de manière que *yx* se trouve sur la direction de *cb*, et *yz* sur celle de *ci*. Soit *k* le point de la ligne *cb* auquel se termine le côté *yx*. Si l'on mène *kf* (fig. 55) parallèle à la base *bi*, il est évident que les triangles *bic*, *kfc*, seront semblables, et que de plus la base *kf* se trouvera divisée par la perpendiculaire *ct* en deux parties *ef*, *ke*, qui seront entre elles dans le même rapport que *ti* et *bt*, ou que *qz* et *qx* (fig. 56). Or, on ne peut mener du point *k* (fig. 55)

Donc, $ad : ds :: al : ax$,

ou $2p : \sqrt{g^2+p^2} :: \sqrt{g'^2+p'^2} : p'$,

ou $4p^2 : g^2+p^2 :: g'^2+p'^2 : p'^2$.

Si du second terme de chaque rapport on retranche la moitié du premier, la proportion devient

$$4p^2 : g^2-p^2 :: g'^2+p'^2 : \frac{p'^2-g'^2}{2},$$

ou $2p^2 : g^2-p^2 :: g'^2+p'^2 : p'^2-g'^2$.

Or, le premier rapport est celui du sinus total au cosinus du petit angle saillant du rhomboïde aigu,

---

dans l'ouverture de l'angle bci aucune autre ligne qui ait les mêmes propriétés. Car imaginons que la ligne substituée à kf, se relève au-dessus de celle-ci, en prenant la position kf'. La perpendiculaire ce' menée du sommet sur kf' sera évidemment plus petite que ce; donc puisque l'on doit avoir

$$(ke')^2 + (ce')^2 = (ke)^2 + (ce)^2 = (ck)^2,$$

ke' sera nécessairement plus grande que ke; mais la ligne entière kf' est plus courte que kf, donc le rapport $e'f' : ke'$ est plus petit que $\frac{m}{n}$. On prouvera par un raisonnement analogue que si la ligne kf'' substituée à kf, s'abaisse en dessous de celle-ci, le rapport entre les parties $e''f''$, ke'' de kf'' divisée par la perpendiculaire ce'' est plus grand que $\frac{m}{n}$. Donc, dans la superposition du petit triangle sur le plus grand, la ligne xz (fig. 56) coïncide avec la ligne kf (fig. 55), d'où il suit que les deux triangles sont semblables.



et le second rapport est celui du sinus total au cosinus du petit angle plan du rhomboïde obtus. Donc les angles plans de ce dernier rhomboïde sont égaux aux angles saillans de l'autre.

Si dans la proportion

$$2p^2 : g^2 - p^2 :: g'^2 + p'^2 : p'^2 - g'^2,$$

on ajoute le second terme de chaque rapport au premier, elle devient

$$g^2 + p^2 : g^2 - p^2 :: 2p'^2 : p'^2 - g'^2.$$

Or, dans celle-ci le premier rapport est celui du sinus total au cosinus du petit angle plan du rhomboïde aigu, et le second rapport est celui du sinus total au cosinus du petit angle saillant du rhomboïde obtus; donc les angles saillans de ce dernier rhomboïde sont égaux aux angles plans de l'autre.

81. Connaissant le rapport entre les demi-diagonales de l'un des deux rhomboïdes, il est facile de trouver celui qui existe entre les demi-diagonales de l'autre. Supposons que l'on connaisse g' et p', et que l'on cherche g et p. Je reprends la proportion

$$2p^2 : g^2 - p^2 :: g'^2 + p'^2 : p'^2 - g'^2,$$

dont je dispose ainsi les termes,

$$g^2 - p^2 : 2p^2 :: p'^2 - g'^2 : g'^2 + p'^2.$$

Ajoutant au premier terme de chaque rapport la

moitié du second, on a

$$g^2 - p^2 + p^2 : 2p^2 :: p'^2 - g'^2 + \frac{g'^2 + p'^2}{2} : g'^2 + p'^2,$$

ou

$$g^2 : 2p^2 :: \frac{3p'^2 - g'^2}{2} : g'^2 + p'^2;$$

d'où l'on tire,

$$g : p :: \sqrt{3p'^2 - g'^2} : \sqrt{g'^2 + p'^2}.$$

Si l'on suppose au contraire que les demi-diagonales connues soient g et p, on trouve

$$g' : p' :: \sqrt{3p^2 - g^2} : \sqrt{g^2 + p^2},$$

proportion dans laquelle les termes du second rapport sont des fonctions de g et de p semblables à celles de g' et de p' que présente le second rapport de la proportion précédente, en sorte que l'une des deux, prise à volonté, donne le résultat proposé, quel que soit celui des deux rhomboïdes dont on suppose les diagonales connues. Cette identité dans les fonctions de g, p, et g', p', provient de ce que par une suite de l'inversion qui existe dans les angles des deux rhomboïdes, la coupe transversale de chacun d'eux est semblable aux faces de l'autre, ou, ce qui revient au même, le rapport entre les demi-diagonales de la coupe transversale de l'un est égal au rapport entre les demi-diagonales des faces de l'autre. Or, on trouve, en employant les formules du n° 6, que le rapport entre les demi-diagonales de la coupe



transversale d'un rhomboïde est en général celui de $\sqrt{3p^2-p^2}:\sqrt{g^2+p^2}$, la quantité $\sqrt{3p^2-g^2}$ étant l'expression de la plus petite des diagonales, si le rhomboïde est obtus, et de la plus grande, s'il est aigu. Maintenant, lorsque dans la comparaison de deux rhomboïdes dont chacun a ses angles plans et solides réciproques à ceux de l'autre, celui dont on cherche les diagonales est aigu, auquel cas le second dont les diagonales sont censées connues est obtus, si l'on désigne par g' et p' les demi-diagonales que l'on cherche, et par g et p celles que l'on connaît, g' étant alors plus petit que p', et $\sqrt{3p^2-g^2}$ devant être aussi plus petit que $\sqrt{g^2+p^2}$, on aura

$$g':p'::\sqrt{3p^2-g^2}:\sqrt{g^2+p^2};$$

et lorsqu'au contraire les demi-diagonales censées connues sont celles du rhomboïde obtus, auquel cas celui dont on cherche les diagonales est aigu, si l'on continue de représenter par g' et p', les demi-diagonales inconnues, et par g et p celles que l'on connaît, g' étant plus grand que p', et $\sqrt{3p^2-g^2}$ devant être de même plus grand que $\sqrt{g^2+p^2}$, on aura encore, $g':p'::\sqrt{3p^2-g^2}:\sqrt{g^2+p^2}$, d'où l'on voit que la proportion satisfait aux deux cas indiqués.

82. Concevons maintenant que le rhomboïde obtus fasse à l'égard de l'autre la fonction de noyau, et cherchons la loi de décroissement en vertu de laquelle

il est susceptible de produire l'autre, ce décroissement étant censé agir sur l'angle inférieur du noyau dont il s'agit. Soit *aosl* (fig. 54) la coupe de ce noyau, et soit *pyuh* une coupe semblable à *adsg*, prise par des parallèles aux côtés de celle-ci, et que nous supposerons être celle du rhomboïde secondaire. Les triangles *orp*, *anl*, sont semblables, *orp* étant lui-même semblable à *dra*.

Donc

$$or:pr::\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{n-1}\right)a::an:nl::\tfrac{1}{3}a:\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

ou

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{2n+1}{3n-3}.a::\tfrac{1}{3}a:\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Donc

$$\tfrac{4}{3}g^2=\frac{2n+1}{9n-9}.a^2=\frac{2n+1}{9n-9}(9p^2-3g^2),$$

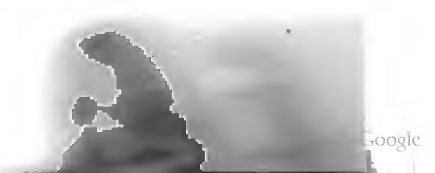
et

$$4g^2=\frac{2n+1}{n-1}(3p^2-g^2);$$

d'où l'on tire

$$n=\frac{g^2+p^2}{2g^2-2p^2},$$

Concevons au contraire que ce soit le rhomboïde aigu qui fasse à l'égard de l'autre la fonction de noyau, et supposant que le décroissement en vertu duquel il produit celui-ci agisse sur l'angle A, cherchons la loi de ce décroissement. Nous pouvons alors considérer *adsg* comme la coupe du noyau, et *aosl* comme celle du rhomboïde secondaire.



Les triangles semblables *axn*, *aor*, donnent

$$xn:an::or:ar::(n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{2n-1}{3}.a.$$ (voyez 21).

De plus, les triangles semblables *axn*, *sdr*, donnent

$$xn:an::rs:dr::\tfrac{1}{3}a:\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

donc

$$(n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{2n-1}{3}.a::\tfrac{1}{3}a:\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Donc

$$(n+1)\tfrac{4}{3}g^2=\frac{2n-1}{9}(9p^2-3g^2),$$

ou

$$(n+1)4g^2=(2n-1)(3p^2-g^2),$$

d'où l'on tire

$$n=\frac{g^2+p^2}{2p^2-2g^2}.$$

Il est remarquable que les deux rapports qui expriment les valeurs de n soient la moitié de ceux qui expriment les cosinus des petits angles plans, dans deux rhomboïdes dont l'un est obtus et l'autre aigu. Nous avons déjà vu le rapport qui représente le cosinus du petit angle saillant d'un rhomboïde obtus, ou plutôt la moitié de ce rapport, se reproduire de même dans le développement des analogies qu'offrent les résultats des décroissemens sur les bords inférieurs.

83. Dans l'hypothèse d'un rhomboïde obtus pris pour noyau, on peut aussi considérer le décroissement qui donne son inverse comme agissant par ren-

versement sur l'angle inférieur ; désignant alors par n' l'exposant de la loi qui se rapporte à ce décroissement, il sera facile d'en trouver la valeur d'après la formule $n'=\frac{n+2}{4n-1}$ (65) Si le noyau est un rhomboïde aigu, on pourra aussi supposer que le décroissement qui produit son inverse agisse par renversement sur l'angle supérieur, et désignant de même par n' l'exposant de la loi relative à ce décroissement, on en trouvera la valeur à l'aide de la formule $n'=\frac{2-n}{4n+1}$.

84. Avant de passer aux applications, proposons-nous encore de résoudre le problème suivant. Etant données les demi-diagonales g et p d'un rhomboïde considéré comme noyau, et la loi de décroissement qui produit un rhomboïde secondaire, en agissant directement sur l'un des angles A, e, trouver la loi qui produirait le rhomboïde inverse de celui-ci, à l'aide d'un décroissement sur l'autre angle.

Soit ν l'exposant de la loi qui agit sur l'angle A, et ν' celui de la loi qui a lieu sur l'angle e.

Le triangle xag (fig 5, pl. 15), qui appartient au rhomboïde produit par le décroissement sur A, est semblable au triangle pmu (fig. 42, pl. 18), relatif au rhomboïde qui naît du décroissement sur e ; c[illegible] une suite de ce que les coupes des deux rh[illegible] ont les mêmes angles; donc [illegible] les triar[illegible])fig. 5), et mzu (fig. 42), [illegible]les.

Donc $xn : an$ (fig. 5) ou $mu : au :: mz$ (fig. 42) $: uz$. Or, d'une part,

$$mu : au :: \frac{2\nu - 1}{3} a : (\nu + 1) \sqrt{\tfrac{4}{3} g^2} :: (2\nu - 1) a : (3\nu + 3) \sqrt{\tfrac{4}{3} g^2}.$$

Soit γ la demi-diagonale horizontale du rhomboïde produit par le décroissement sur e. Nous aurons d'une autre part

$$mz : uz :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{\nu' - 1}\right) a = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\nu' + 1}{\nu' - 1}\right) a.$$

Donc

$$(2\nu - 1) a : (3\nu + 3) \sqrt{\tfrac{3}{4} g^2} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{1}{3}\left(\frac{\nu' + 1}{\nu' - 1}\right) a;$$

ou

$$(2\nu - 1) a : (6\nu + 6) g \sqrt{\tfrac{1}{3}} :: 2\gamma \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \tfrac{1}{3}\left(\frac{\nu' + 1}{\nu' - 1}\right) a;$$

mais $$\gamma = \frac{2\nu' + 2}{2\nu' + 1} g.$$

Donc

$$(2\nu - 1) a : (6\nu + 6) g \sqrt{\tfrac{1}{3}} :: \frac{4\nu' + 4}{2\nu' + 1} g \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \tfrac{1}{3}\left(\frac{\nu' + 1}{\nu' - 1}\right) a.$$

Prenant le produit des extrêmes et celui des moyens, puis réduisant,

$$\frac{2\nu - 1}{\nu' - 1} a^2 = \frac{24\nu + 24 g^2}{2\nu' + 1};$$

$$\ldots 3g^2) = \frac{24\nu + 24 g^2}{2\nu' + 1};$$

d'où l'on tire

$$\frac{6\nu p^2 - 2\nu g^2 - 3p^2 + g^2}{\nu' - 1} = \frac{8\nu g^2 + 8g^2}{2\nu' + 1},$$

ce qui conduit aux deux équations finales

$$\nu' = \frac{2\nu(g^2 + p^2) + 3g^2 - p^2}{4\nu(g^2 - p^2) + 2(g^2 + p^2)},$$
$$\nu = \frac{2\nu'(g^2 + p^2) - 3g^2 + p^2}{4\nu'(p^2 - g^2) + 2(g^2 + p^2)}.$$

85. Pour appliquer les résultats précédens, supposons d'abord que l'on veuille déterminer les demi-diagonales du rhomboïde qui présente l'inverse du primitif, dans la chaux carbonatée, et la loi de décroissement dont il dépend. Dans ce cas, les demi-diagonales du primitif étant désignées par g' et p', et celles de l'autre rhomboïde par g et p, si l'on fait $g' = \sqrt{3}$, $p' = \sqrt{2}$, et si l'on substitue ces valeurs dans la proportion

$$g : p :: \sqrt{3p'^2 - g'^2} : \sqrt{g'^2 + p'^2},$$

on aura $$g : p :: \sqrt{3} : \sqrt{5}.$$

Soit n l'exposant du décroissement, en supposant que celui-ci agisse directement sur l'angle e du rhomboïde primitif. Nous avons $n = \frac{g^2 + p^2}{2g^2 - 2p^2}$; donc $n = \frac{5}{2}$; c'est-à-dire que dans l'hypothèse présente le décroissement se fera par cinq rangées sur l'angle e. Si nous supposons au contraire que le décroissement agisse par renversement sur le même angle, alors n' dési-

gnant le nombre de demi-diagonales soustraites en largeur, on aura $n' = \frac{n+2}{4n-1} = \frac{1}{2}$. J'ai fait voir plus haut que cette dernière loi est la véritable, et j'ai déterminé les rapports entre les angles du rhomboïde primitif et ceux de la variété dont il s'agit ici, à laquelle j'ai donné le nom de *chaux carbonatée inverse*.

86. Si l'on prend au contraire pour noyau le rhomboïde qui présente cette variété, et que l'on cherche les demi-diagonales g', p', de celui qui fait à son égard la fonction d'inverse, et la loi qui serait susceptible de produire ce dernier, la proportion

$$g' : p' :: \sqrt{3p^2 - g^2} : \sqrt{g^2 + p^2}$$

devient

$$g' : p' :: \sqrt{12} : \sqrt{8} :: \sqrt{3} : \sqrt{2},$$

ainsi que cela doit être. Soit n l'exposant du décroissement qui est censé ici être direct sur l'angle supérieur ; la formule relative à ce mode de décroissement étant $n = \frac{g^2 + p^2}{2p^2 - 2g^2}$, on aura $n = 2$, ce qui indique un décroissement par quatre rangées en largeur ; et si l'on cherche le décroissement inverse qui produirait le même rhomboïde, désignant par n' la loi de ce décroissement, et employant la formule $n' = \frac{2-n}{4n+1}$, on voit que n' devient $\frac{0}{9}$, ou infiniment petit ; c'est-à-dire que dans ce cas le rhomboïde est le même que

celui qui naîtrait d'un décroissement par une rangée sur les bords supérieurs de l'autre rhomboïde.

87. Adoptons pour noyau le rhomboïde de $134^d\frac{1}{2}$ que j'ai nommé *équiaxe ;* en continuant d'employer les mêmes formules, et faisant $g' = \sqrt{12}$, $p' = \sqrt{5}$, on trouve que dans le rhomboïde qui fait à son égard la fonction d'inverse, le rapport entre les demi-diagonales g et p est celui de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{17}$, que l'exposant n du décroissement direct sur l'angle inférieur, susceptible de le produire, est $\frac{17}{14}$, et que l'exposant n' du décroissement inverse que l'on peut substituer au précédent est $\frac{5}{6}$.

88. Si l'on adopte au contraire pour noyau le rhomboïde aigu dont les demi-diagonales g et p sont entre elles dans le rapport de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{17}$, on trouve que dans celui qui présente son inverse,

$$g' : p' :: \sqrt{12} : \sqrt{5},$$

que l'exposant n du décroissement dont ce dernier dépend, et qui est censé être direct sur l'angle supérieur, est $\frac{5}{7}$, et que l'exposant n' du décroissement inverse qui peut être substitué au précédent est $\frac{1}{2}$.

89. Replaçons maintenant les deux rhomboïdes que nous venons de comparer, parmi les formes secondaires du rhomboïde de $104^d\frac{1}{2}$, qui est le noyau indiqué par la division mécanique, et supposant que l'on connaisse l'exposant du décroissement direct qui est susceptible de produire celui des deux rhomboïdes

qui est obtus, en agissant sur l'angle A, cherchons l'exposant ν' du décroissement qui produirait l'autre en agissant de même directement, mais sur l'angle *e*. Il faudra substituer 2 à ν, $\sqrt{3}$ à g, et $\sqrt{2}$ à p, dans la formule $\nu' = \frac{2\nu(g^2+p^2)+3g^2-p^2}{4\nu(g^2-p^2)+2(g^2+p^2)}$, ce qui donnera $\nu' = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$.

Cette loi est la même que celle dont nous sommes partis ci-dessus, pour trouver le rapport $\sqrt{3}$ à $\sqrt{17}$ entre les demi-diagonales g' et p' du rhomboïde qui nous occupe. C'est ici le lieu d'expliquer le nom de *chaux carbonatée contrastante* que j'ai donné à la variété à laquelle appartient ce rhomboïde. Il est tiré de ce qu'il offre, à l'égard du rhomboïde équiaxe, la même inversion d'angles que le rhomboïde inverse comparé au primitif, inversion qui forme ici une sorte de contraste, en ce que l'un des rhomboïdes est très aigu et l'autre très obtus.

En appliquant au cas présent le calcul que j'ai donné plus haut, à l'occasion du rhomboïde inverse, et en faisant successivement $g = \sqrt{12}$, $p = \sqrt{5}$, pour le romboïde équiaxe, et $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{17}$, pour le contrastant, on trouvera que dans le premier, le rapport entre le rayon et le cosinus du petit angle plan est celui de 17 à 7, ce qui donne pour cet angle $65^d\ 41'\ 4''$, et que le rapport entre le rayon et le cosinus de la plus petite incidence des faces est celui de 10 à 7, ce qui donne pour cette incidence

d'eux se confond avec l'arête de celui qui est censé le produire. Or, parmi ces rhomboïdes, les uns, tels que $a\delta s\gamma$, $a\delta' s\gamma'$, résulteront d'un décroissement en largeur sur l'angle A du générateur considéré comme leur noyau commun, et les autres, tels que $ad'sg'$, $ad''sg''$, résulteront d'un décroissement en hauteur sur le même angle. Cherchons les formules relatives à ces deux cas.

1°. Pour les rhomboïdes produits par un décroissement direct; soient g, p, les demi-diagonales du générateur; γ, π, celles du rhomboïde proposé, et n la loi du décroissement susceptible de produire ce dernier. En général $\gamma = g.2$ (*voyez* page 301).

Donc $$\sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} = 2^r \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

D'une autre part, si nous prenons pour exemple le rhomboïde dont la coupe est $a\delta s\gamma$, nous aurons

$$\delta n : an :: mu \text{ (p. 311)} : au :: (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Mais on a aussi

$$\delta n : an :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9\pi^2-3\gamma^2} = \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2-3g^2},$$

à cause de l'égalité des axes. Donc

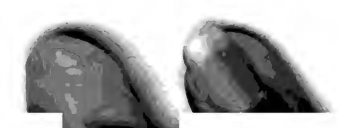
$$2^r\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2-3g^2} : (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2},$$

ou

$$2^r : 2 :: n+1 : 2n-1 \,;\quad 2^{r-1} : 1 :: n+1 : 2n-1 \,;$$

$$2n.2^{r-1} - 2^{r-1} = n+1 \,;\quad n.2^r - n = 2^{r-1} + 1.$$





Donc $$n=\frac{2^{r-1}+1}{2^r-1}.$$

2°. Pour les rhomboïdes produits par un décroissement inverse. Soit r' le rang du terme proposé. Nous aurons toujours $\gamma=g.2^{r'}$, et prenant pour exemple le rhomboïde dont la coupe est $ad''sg''$,

$$d''r:ar::uy:au\ (\text{p. } 317)::(n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{1-2n}{3}\sqrt{a^2}.$$

Mais de plus,

$$d''r:ar::\sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2}:\tfrac{1}{3}\sqrt{9\pi^2-3\gamma^2}, \text{ ou } \tfrac{2}{3}\sqrt{a^2}.$$

Donc

$$(n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{1-2n}{3}\sqrt{a^2}::2^{r'}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\tfrac{2}{3}\sqrt{a^2};$$

ou $$n+1:1-2n::2^{r'}:2;$$

d'où l'on tire

$$2n+2=2^{r'}-2n.2^{r'},$$
$$n+1=2^{r'-1}-n.2^{r'},$$

et $$n=\frac{2^{r'-1}-1}{2^{r'}+1}.$$

92. Passons tout de suite aux rhomboïdes qui naissent les uns des autres, en vertu de la loi E''E, et bornons-nous de même à ceux qui sont compris dans la série ascendante.

Soit *adsg* (fig. 58) la coupe du rhomboïde générateur. Les coupes des autres rhomboïdes seront suc-

cessivement les quadrilatères $a'd's'g'$, $a''d''s''g''$, $a'''d'''s'''g'''$, dans chacun desquels la ligne $a'g'$, $a''g''$, etc., qui représente l'arête supérieure, est parallèle à la diagonale oblique ad, $a'd'$, etc., du rhomboïde précédent. Parmi les divers rhomboïdes de la série, les uns, tels que $a''d''s''g''$, tourneront leurs diagonales vers celle du noyau, et résulteront d'un décroissement en largeur sur l'angle e; et les autres, tels que $a'd's'g'$, $a'''d'''s'''g'''$, auront leurs bords supérieurs tournés vers les diagonales du noyau, et résulteront d'un décroissement en hauteur sur l'angle e.

1°. Pour les rhomboïdes produits par un décroissement direct. Soient g et p les demi-diagonales du générateur; γ, π, celles du rhomboïde proposé, et r le rang du terme auquel il répond. En général,

$$\gamma = \left(\tfrac{3}{2}\right)^r g, \text{ et } \sqrt{9\pi^2 - 3\gamma^2} = 3^r \sqrt{9p^2 - 3g^2} = 3^r a \ (60).$$

Menons du parallèle à la diagonale oblique inférieure du rhomboïde proposé. On aura

$$dr \text{ ou } \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^r \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2};$$

de plus

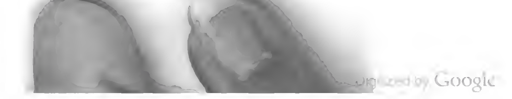
$$dr : ru :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9\pi^2 - 3\gamma^2}.$$

Or,

$$ru = rs + us = \tfrac{1}{3}a + \frac{n}{1-n}a \ (64) = \frac{1+2n}{3-3n}a.$$

Donc

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} \text{ ou } \left(\tfrac{2}{3}\right)^r \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \frac{1+2n}{3-3n}a :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9\pi^2 - 3\gamma^2} = \tfrac{2}{3}\cdot 3^r a;$$



ou $\left(\frac{2}{3}\right)^r : \frac{1+2n}{3-3n} :: 1 : \frac{2}{3}.3^r,$

et $\left(\frac{2}{3}\right)^r : \frac{1+2n}{1-n} :: 1 : 2.3^r;$

d'où l'on tire $2^r = \frac{1+2n}{2-2n};$

et enfin, $n = \frac{2^{r+1}-1}{2(2^r+1)}.$

2°. Pour les rhomboïdes produits par un décroissement inverse. Soit *dp* une ligne parallèle à la diagonale oblique du rhomboïde proposé. Nous aurons encore

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^r \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2}, \quad \text{et} \quad \sqrt{9\pi^2 - 3\gamma^2} = 3^r.a.$$

De plus

$$dr : pr :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^r \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \left(\tfrac{2}{3}a + \frac{1}{n-1}\right)a = \frac{2n+1}{3n-3}a$$
$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{2}{3}.3^r.a;$$

ou $\left(\frac{2}{3}\right)^r : \frac{2n+1}{3n-3} :: 1 : \frac{2}{3}.3^r;$

d'où l'on tire

$$2.3^r\left(\tfrac{2}{3}\right)^r = \frac{2n+1}{n-1},\ 2^{r+1} = \frac{2n+1}{n-1},\ n.2^{r+1} - 2^{r+1} = 2n+1,$$

$$n.2^{r+1} - 2n = 2^{r+1} + 1,\ n = \frac{2^{r+1}+1}{2^{r+1}-2};$$

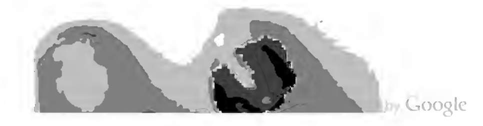
et enfin $n = \frac{2^{r+1}+1}{2(2^r-1)}.$

93. Les formules auxquelles nous sommes parvenus, pour les séries ascendantes, s'appliquent, en sens inverse, aux séries descendantes, en sorte que nous sommes dispensés de chercher directement celles qui ont rapport à ces dernières séries.

Soit *adsg* (fig. 59) le même quadrilatère que fig. 57, et qui est, comme nous l'avons dit, la coupe principale du générateur relative aux rhomboïdes qui naissent les uns des autres, en vertu du décroissement $\underset{1}{B}$. Il est facile de voir que la coupe du rhomboïde qui donne le premier terme de la série descendante, sera le quadrilatère *a*G*s*D, qui a le même axe que *adsg*, et dans lequel les lignes *a*G, *s*D, qui représentent deux bords supérieurs se confondent avec les diagonales obliques *ad*, *sg*.

Or, nous avons vu (p. 367) que le même rhomboïde qui est produit par tel autre en vertu du décroissement $\underset{1}{B}$, peut à son tour en produire un semblable à celui-ci, à l'aide du décroissement E''E; donc, si par les points *g*, *d*, on fait passer la coupe *a'd's'g'* du rhomboïde produit en vertu de ce dernier décroissement, par celui auquel appartient *adsg*, le rhomboïde dont il s'agit sera le premier terme de la série ascendante relative au décroissement E''E, c'est-à-dire que *a'd's'g'* sera semblable à *a'd's'g'* (fig. 58).

En faisant le même raisonnement par rapport aux rhomboïdes suivans, on en conclura que les for-



mules relatives à la série ascendante pour les décroissemens dont le signe est $E^{1\,1}E$, s'appliquent à la série descendante, pour les décroissemens qui ont pour signe $\underset{1}{B}$.

D'une autre part, soit *adsg* (fig. 60), le même quadrilatère que fig. 58, qui est la coupe du générateur, relative aux rhomboïdes produits les uns par les autres, à l'aide du décroissement $E^{1\,1}E$. On concevra aisément que la coupe du rhomboïde qui donne le premier terme de la série descendante, est le quadrilatère ADSG, dans lequel l'axe AS est le tiers de *as*, et les lignes AD, GS, qui représentent deux diagonales obliques, sont parallèles aux bords supérieurs *ag*, *ds*, du générateur.

Or, la propriété inverse de celle qui a été énoncée plus haut est également vraie ; c'est-à-dire que le même rhomboïde qui naît de tel autre, à l'aide du décroissement $E^{1\,1}E$, est susceptible à son tour d'en produire un semblable à celui-ci, en vertu du décroissement $\underset{1}{B}$; donc si par les points *a*, *s*, on fait passer la coupe *ad'sg'* du rhomboïde qui résulte de ce dernier décroissement rapporté au générateur dont *adsg* représente la coupe, le rhomboïde dont il s'agit sera le premier terme de la série ascendante relative au décroissement $\underset{1}{B}$, ou, ce qui revient au même, *ad'sg'* sera semblable à *ad'sg'* (fig. 57).

Le même raisonnement s'étend aux rhomboïdes suivans, d'où l'on conclura que les formules relatives

à la série ascendante, pour les décroissemens $\overset{1}{B}$, donnent également la loi à laquelle est soumise la série descendante, pour les décroissemens dont le signe est E''E.

94. Pour faire quelques applications, prenons d'abord la formule

$$n = \frac{2^{r-1} \pm 1}{2^r \mp 1}$$

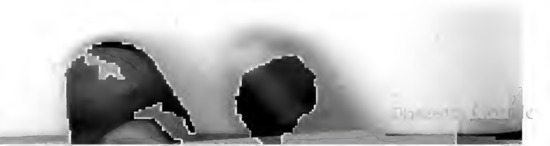
qui se rapporte soit à la série ascendante pour les décroissemens B, soit à la série descendante pour les décroissemens $\overset{1}{E}$''E ; les signes supérieurs ayant lieu pour les décroissemens directs, et les inférieurs pour les décroissemens inverses.

Si l'on égale r successivement à 1, 2, 3, 4, 5, on trouve

$$n = \tfrac{0}{3},\ n = 1,\ n = \tfrac{1}{3},\ n = \tfrac{3}{5},\ n = \tfrac{17}{7}.$$

La première valeur de n, qui est nulle, indique que la diagonale oblique du rhomboïde produit se confond avec l'arête du générateur, ce qui a lieu dans la variété de chaux carbonatée nommée *équiaxe* (13).

La seconde valeur de n, qui est l'unité, convient à la variété de fer oligiste appelée *binaire*, et que j'ai décrite plus haut (p. 312). Les deux valeurs suivantes de n, savoir $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{5}$, quoiqu'elles rentrent dans les limites des lois connues, ne se sont point encore rencontrées dans les résultats de la cristallisation ; et



quand à la dernière valeur $\frac{17}{7}$, qui s'éloigne déjà de la simplicité des lois ordinaires, elle n'est probablement qu'hypothétique.

95. Passons à la formule $\frac{2^{r+1} \pm 1}{2(2^r \mp 1)}$, relative soit à la série ascendante pour les décroissemens E''E, soit à la série descendante pour les décroissemens B_1, les signes supérieurs ayant lieu dans le cas des décroissemens directs, et les inférieurs dans celui des décroissemens inverses.

En égalant de même successivement la quantité r à 1, 2, 3, 4, 5, on trouve

$$n = \frac{1}{2},\ n = \frac{3}{2},\ n = \frac{17}{14},\ n = \frac{11}{10},\ n = \frac{65}{62}.$$

Si l'on continue de prendre pour générateur le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, la première valeur de n, qui est $\frac{1}{2}$, donnera le rhomboïde inverse (p. 361); la seconde, qui est $\frac{3}{2}$, donnera le rhomboïde contrastant (p. 378).

Quant aux trois suivantes, leur défaut de simplicité semble leur donner l'exclusion parmi les produits de la cristallisation.

96. Les résultats precédens conduisent, par une marche différente, à la même filiation, entre les rhomboïdes nommés *équiaxe*, *primitif*, *inverse* et *contrastant*, que nous avons déjà déduite des rapports entre les demi-diagonales de ces rhomboïdes (14).

Je terminerai cet article par la solution d'un genre de problèmes qui achèvera de mettre dans tout

son jour la dépendance mutuelle qu'ont entre eux les cristaux d'une même espèce, en faisant voir sous combien de faces une même forme se présente à la théorie pour en varier les applications.

97. Soit *ss'* (fig. 61, pl. 20) un dodécaèdre à triangles scalènes. On peut concevoir dans l'intérieur du solide cinq rhomboïdes différens, dont chacun soit susceptible de le produire, à l'aide d'un décroissement simple. Le premier est celui dont les bords inférieurs analogues à D (fig. 62), se confondent avec les lignes *ge*, *en*, *nl*, etc. (fig. 61), et, dans ce cas, le dodécaèdre résultera d'un décroissement sur les bords dont il s'agit. Le second est celui dont les bords supérieurs B (fig. 62) se confondent avec les lignes *gs*, *sn* (fig. 61), c'est-à-dire avec les arêtes longitudinales les plus saillantes du dodécaèdre, prises deux à deux, en partant du sommet, et lesquelles deviendront alors les lignes de départ des décroissemens. Le troisième est celui dont les bords supérieurs B, coïncident au contraire avec les arêtes les moins saillantes *es*, *sl*, sur lesquelles agiront de même les décroissemens. Le quatrième aura ses faces parallèles aux arêtes les plus saillantes *gs*, *ns*, prises solitairement, et dans ce cas le dodécaèdre résultera d'un décroissement sur les angles latéraux E, E (fig. 62), de ce rhomboïde. Les faces du cinquième seront parallèles aux arêtes les moins saillantes *es*, *ls* (fig. 61), prises aussi une à une, et le décroissement qui donnera le dodécaèdre aura lieu de même sur les angles E.

Or, il suffit que le dodécaèdre puisse être produit par l'un quelconque des rhomboïdes dont il s'agit, pour que chacun des quatre autres soit également susceptible de faire à son égard la fonction de noyau. Dans la même hypothèse, si l'on choisit deux quelconques des cinq rhomboïdes, chacun pourra donner naissance à l'autre, ou naître de lui, en vertu d'un décroissement sur les angles supérieurs ou inférieurs. Nous nous bornerons ici aux résultats qui dérivent du premier rhomboïde considéré comme générateur, c'est-à-dire de celui dont les bords inférieurs se confondent avec les lignes *ge*, *en*, *nl*, etc.

98. Supposons d'abord que le noyau qu'il s'agit de substituer à ce générateur, pour en déduire hypothétiquement le dodécaèdre, soit celui dont les faces passent l'une par les lignes *sg*, *sn*, une seconde par les lignes *sn*, *sy*, etc.

Désignons par g, p, les demi-diagonales du générateur, par g', p', celles du noyau hypothétique, par n la loi de décroissement qui donne le dodécaèdre en agissant sur les bords inférieurs du générateur, et par n' celle qui le produirait en agissant sur les bords supérieurs du noyau hypothétique. Etant donné g, p et n, cherchons d'abord g' et p'.

Soit *adsg* (fig. 63) la coupe principale du générateur, *dp*, *gu*, deux des arêtes les moins saillantes du dodécaèdre, opposées entre elles, et *gp*, *du*, les deux arêtes saillantes situées dans le même plan. Soient *dr*, *gc*, des lignes perpendiculaires sur l'axe.

Si par le milieu c de la diagonale ac nous menons pm, elle sera une des diagonales obliques du noyau hypothétique, et um sera l'arête adjacente à cette diagonale vers le sommet inférieur.

Or, en reprenant ici ce qui a été dit plus haut, au sujet des décroissemens sur les bords supérieurs (p. 290), il est aisé de voir que la ligne mo perpendiculaire sur l'axe répond à dr (fig. 5, pl. 15). Donc

$$mo \text{ (fig. 63)} = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2};$$

mais

$$pu = as + 2ap = a + a \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{n+1}{n-1}a \text{ (p. 369)}.$$

Donc uo étant le tiers de l'axe pu, on aura

$$uo = \tfrac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)a = \frac{n+1}{3n-3}a.$$

$$uo : ur :: mo : dr;$$

$$ur = us + rs = \frac{1}{n-1}a + \tfrac{1}{3}a = \frac{n+2}{3n-3}a.$$

Donc

$$\frac{n+1}{3n-3}a : \frac{n+2}{3n-3}a :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

d'où l'on tire

$$g' = \frac{n+1}{n+2}g.$$

Mais

$$pu \text{ ou } \sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = \frac{n+1}{n-1}a.$$

Donc

$$9p'^2 - 3\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 g^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2 ;$$

donc

$$p'^2 = \tfrac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 g^2 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2 ;$$

donc

$$g' : p' :: \sqrt{\frac{1}{(n+2)^2} \cdot g^2} : \sqrt{\frac{1}{(n+2)^2} \cdot \tfrac{1}{3} g^2 + \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \tfrac{1}{9} a^2} .$$

Cherchons maintenant le rapport de n' à n. La ligne *dr* étant la même que *mu* (fig. 5, pl. 15), *pr* (fig. 63, pl. 20) sera la même que *au* (fig. 5, pl. 15).

Or,

$$au = \frac{2n'-1}{3n'} \sqrt{9p'^2 - 3g'^2} \text{ (p. 292)};$$

$$pr \text{(fig. 63)} = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{3}\right) \sqrt{9p^2 - 3g^2} = \frac{2n+1}{3n-3} \sqrt{9p^2 - 3g^2} .$$

Donc

$$\frac{2n'-1}{3n'} \sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = \frac{2n+1}{3n-3} \sqrt{9p^2 - 3g^2} ;$$

Mais

$$\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = pu = \frac{n+1}{n-1} \sqrt{9p^2 - 3g^2} .$$

Donc

$$\frac{2n'-1}{3n'} \times \frac{n+1}{n-1} = \frac{2n+1}{3n-3} ;$$

d'où l'on tire

$$n' = n+1 \text{, et } n = n'-1 .$$

99. Soit maintenant n'' l'expression de la loi qui donnerait le noyau hypothétique, comme forme secondaire du générateur, en agissant sur l'angle inférieur e de ce dernier. Si nous menons dh parallèle à cp, la première ligne sera une des diagonales obliques du noyau hypothétique, et nous aurons

$$ah = \frac{1}{n''-1}a' \text{ (p. 369).}$$

Mais $$ap : ah :: ac : ad :: 1 : 2 ;$$

donc

$$ah = 2ap, \text{ et } \frac{a'}{n''-1} = \frac{2a}{n-1}.$$

D'ailleurs le générateur étant ici un noyau commun au dodécaèdre et au rhomboïde qui fait la fonction de noyau hypothétique, nous avons $a' = a$. Donc

$$\frac{1}{n''-1} = \frac{2}{n-1},$$

ce qui donne

$$n'' = \frac{n+1}{2}.$$

100. Soit $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{2}$, comme dans la chaux carbonatée, et $n = 2$. Le dodécaèdre sera celui qui porte le nom de *métastatique* (p. 336). Dans le même cas on a

$$g' : p' :: \sqrt{3} : \sqrt{17}, n' = 3 \text{ et } n'' = \tfrac{3}{2}.$$

Ainsi le dodécaèdre est susceptible d'être produit en vertu d'un décroissement par trois rangées sur les

bords supérieurs du noyau hypothétique, dans lequel le rapport entre les demi-diagonales est celui de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{17}$, et ce dernier, considéré comme forme secondaire du générateur, dépend d'un décroissement par trois rangées sur les angles inférieurs du même générateur; c'est-à-dire que le noyau hypothétique est semblable au rhomboïde contrastant (p. 378).

101. On connaît une variété de chaux carbonatée, représentée (fig. 64, pl. 20), dont le signe rapporté au véritable noyau est $\underset{m}{\overset{3}{e}}\underset{r}{\overset{2}{D}}$, et qui offre la réunion du noyau hypothétique dont je viens de parler avec le dodécaèdre auquel il donnerait naissance en vertu du décroissement $\underset{3}{B}$. Assez souvent les faces *m* ont une étendue qui semble les rendre prédominantes, comme on le voit sur la figure, en sorte qu'ici les apparences sont pour l'hypothèse dans laquelle l'inverse serait le générateur du cristal.

102. Supposons maintenant que le noyau hypothétique soit le rhomboïde dont les faces passent, l'une par les lignes *sk*, *se*, une seconde par les lignes *se*, *sl*, etc., et continuons de nous servir de la figure 63. Si par le milieu *k* de la diagonale *gs* nous menons *px*, elle sera une des diagonales obliques du noyau hypothétique, et *ux* sera l'arête inférieure contiguë à cette diagonale. De plus, si du point *x* nous menons une perpendiculaire *xo* sur l'axe *pu*, il est évident qu'elle sera sur la direction de la per-

pendiculaire *mo*, relative au cas précédent, puisqu'elle doit aussi couper l'axe au tiers de la longueur de celui-ci.

Soient encore g', p', les diagonales du nouveau noyau hypothétique, et n' la loi qui le produirait en agissant sur ses bords supérieurs. Déterminons d'abord g' et p'. Nous aurons

$$xo = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}, \text{ et } uo = \frac{n+1}{3n-3}a,$$

comme ci-dessus.

$$uo : un :: xo : gn;$$

mais

$$un = us + ns = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{3}\right)a = \frac{2n+1}{3n-3}a.$$

Donc

$$n+1 : 2n+1 :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

d'où l'on tire

$$g' = \frac{n+1}{2n+1}g.$$

D'une autre part,

$$\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = \frac{n+1}{n-1}a,$$

comme ci-dessus, et à cause de

$$3g'^2 = 3\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 g^2, \quad 9p'^2 - 3\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 g^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2.$$

Donc

$$p'^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 g^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2.$$

Donc

$$g' : p' :: \frac{1}{2n+1}g : \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 g^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{n-1}\right)^2 a^2}.$$



103. Passons au rapport de n' à n. La ligne gn étant la même que mu (fig. 5, pl. 15), pn (fig. 63, pl. 20) sera la même que au (fig. 5, pl. 15). Or,

$$au=\frac{2n'-1}{3n'}a' \text{ (p. 292)},$$

$$pn\text{(fig. 63)}=\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\right)a=\frac{n+2}{3n-3}a.$$

Donc

$$\frac{2n'-1}{3n'}a'=\frac{n+2}{3n-3}a.$$

Mais d'après ce qui a été dit (p. 421),

$$a'=\frac{n+1}{n-1}a.$$

Donc

$$\frac{2n'-1}{3n'}\cdot\frac{n+1}{n-1}=\frac{n+2}{3n-3}, \text{ ou } \frac{2n'-1}{n'}\cdot(n+1)=n+2;$$

ce qui donne

$$n'=\frac{n+1}{n} \text{ et } n=\frac{1}{n'-1}.$$

Maintenant désignons par n'' l'expression de la loi qui produirait le noyau hypothétique, comme forme secondaire du générateur, en agissant par renversement sur l'angle inférieur e de celui-ci. Si nous menons gl parallèle à px, gl sera une des diagonales obliques du noyau hypothétique, et nous aurons

$$al=\frac{n''}{1-n''}a \text{ (p. 371)}.$$

D'une autre part, les triangles semblables skp,

sgl, donnent

$$sp : sl :: sk : sg :: 1 : 2;$$

donc $\quad sl = 2sp$, et $pl = sp$;

donc puisque $al = ap + pl$, on aura aussi

$$al = ap + sp = 2(as) + ap = \left(\frac{2}{n-1} + 1\right)a = \frac{n+1}{n-1}a,$$

et égalant les deux valeurs de *al*,

$$\frac{n''}{1-n''} = \frac{n+1}{n-1};$$

d'où l'on tire

$$n'' = \frac{n+1}{2n}, \text{ et } n = \frac{1}{2n''-1}.$$

104. Supposons de nouveau que le dodécaèdre secondaire soit le métastatique. Nous aurons encore

$$n = 2, g = \sqrt{3}, a = \sqrt{9};$$

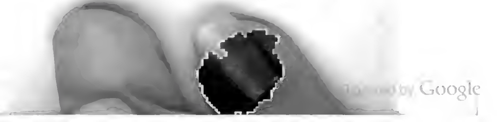
donc

$$g' : p' :: \tfrac{1}{5}\sqrt{3} : \sqrt{\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{25} \cdot 3 + 1} :: \sqrt{3} : \sqrt{26}.$$

Dans le même cas,

$$n' = \tfrac{3}{2}, \quad \text{et} \quad n'' = \tfrac{3}{4};$$

c'est-à-dire que le noyau hypothétique est semblable au rhomboïde mixte (p. 386), et que le dodécaèdre peut résulter d'un décroissement par trois rangées en largeur et deux en hauteur sur les bords supérieurs de ce rhomboïde.



La variété sextrigésimale de chaux carbonatée (fig. 65), dont le signe est $\underset{c}{\overset{2}{e}}\underset{m}{\overset{3}{e}}\underset{s}{\overset{\frac{2}{3}}{e}}\underset{r}{\overset{2}{D}}\underset{\overset{1}{g}}{B}$, présente la réunion de ce même rhomboïde et du précédent avec le dodécaèdre métastatique, c'est-à-dire celle des deux noyaux hypothétiques avec le solide auquel chacun d'eux pourrait servir de générateur. Cette variété renferme en même temps les pans du prisme hexaèdre régulier, et les faces du rhomboïde équiaxe.

105. Concevons maintenant que le rhomboïde qui peut être substitué au générateur, dans la production du dodécaèdre, soit celui dont les faces seraient parallèles aux arêtes les plus saillantes *sn* (fig. 61), *sg*, *sy*, etc. Soient toujours g, p, les demi-diagonales du générateur, g', p', celles du noyau hypothétique, n l'expression de la loi en vertu de laquelle le générateur produirait le dodécaèdre, n' celui de la loi qui aurait lieu sur les angles latéraux du rhomboïde hypothétique substitué au générateur, et n'' celui de la loi à l'aide de laquelle le générateur produirait le noyau hypothétique. Etant données g, p, n, il s'agit de trouver les autres quantités. Cherchons d'abord g' et p'.

Soient *adsg* (fig. 66, pl. 21), et *dpgu* les mêmes quadrilatères que fig. 63, pl. 20, et soit $a'd's'g'$ (fig. 66) la coupe principale du noyau hypothétique. Ayant mené $g'n'l$ perpendiculaire sur l'axe pu, nous aurons, à cause du parallélisme des lignes $a'd'$, pg, $gn : pn :: ln' : a'n'$.

Or,

$$pn = ap + an = \left(\frac{1}{n-1}a + \tfrac{1}{3}a\right) = \frac{n+2}{3n-3}a\,;$$

donc substituant,

$$gn : \frac{n+2}{3n-3}a :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}a'.$$

D'une autre part,

$$gn : un :: d'r' : ur' = us' + r's' :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : us' + \tfrac{1}{3}a'.$$

Mais

$$un = us + ns = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{3}\right)a = \frac{2n+1}{3n-3};$$

donc substituant,

$$gn : \frac{2n+1}{3n-3}a :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : us' + \tfrac{1}{3}a'.$$

La première proportion donne

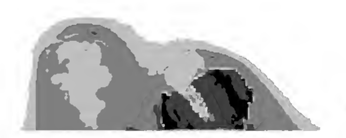
$$gn = \frac{n+2}{3n-3}a\sqrt{\frac{\tfrac{1}{3}g'^2}{\tfrac{1}{3}a'}} = \frac{(n+2)a}{(n-1)a'}\sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2},$$

et la seconde

$$gn = \frac{\frac{2n+1}{3n-3}a\ \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}}{us' + \tfrac{1}{3}a'}:$$

Egalant les deux valeurs de gn, et supprimant les facteurs communs aux deux membres, on trouve

$$\frac{n+2}{a'} = \frac{4n+2}{3us'+a'},$$



d'où l'on tire

$$us'=a'\left(\frac{4n+2}{3n+6}\right)-\tfrac{1}{3}a'=a'\cdot\frac{n}{n+2}.$$

D'une autre part,

$$us'=pu-ps'=pu-a'p-a's'=\frac{n+1}{n-1}a-us'-a';$$

donc

$$2(us')=\frac{n+1}{n-1}a-a',$$

et

$$2(us')=\frac{\frac{n+1}{n-1}a-a'}{2}=a'\cdot\frac{n}{n+2};$$

d'où l'on tire

$$a'=\frac{n+1}{n-1}a\cdot\frac{n+2}{3n+2}.$$

Mais nous avons eu gn ou

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}=\frac{(n+2)a}{(n-1)a'}\sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2};$$

donc

$$2g=\frac{(n+2)a}{(n-1)a'}g',\ \text{et}\ g'=\frac{(2n-2)a'}{(n+2)a}\cdot g;$$

et substituant à la place de a' sa valeur,

$$g'=\frac{2n+2}{3n+2}\cdot g.$$

De plus, nous avons eu

$$a'=\frac{n+1}{n-1}\cdot a\cdot\frac{n+2}{3n+2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$9g'^2-3g'^2=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2\left(\frac{n+2}{3n+2}\right).$$

Et mettant à la place de g'^2 sa valeur,

$$9p'^2-3g^2\left(\frac{2n+2}{3n+2}\right)^2=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2\left(\frac{n+2}{3n+2}{}^2\right),$$

d'où

$$p'=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{1}{9n+6}\sqrt{a^2(n+2)^2+12g^2(n-1)^2};$$

donc

$$g':p'::g(6n-6):\sqrt{a^2(n+2)^2+12g^2(n-1)^2}.$$

106. Dans toutes les recherches du genre de celle-ci, je détermine d'abord les valeurs absolues de g' et de p', pour en conclure ensuite le rapport de ces lignes, parce que les solutions des problèmes en sont plus complètes. On abrégerait beaucoup le calcul en se bornant à trouver immédiatement ce rapport. Par exemple il suffirait, dans le cas précédent, d'avoir la proportion

$$gn \text{ ou } \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{n+2}{3n-3}\cdot a :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}a' \text{ (p. 427)},$$

qui se change en celle-ci,

$$2g : \frac{n+2}{3n-3}\cdot a\sqrt{3} :: \sqrt{g'^2} : \sqrt{3p'^2-g'^2}.$$

Elevant tout au carré, et égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, puis transposant, on

trouve

$$12g^2p'^2 = \left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 3a^2g'^2 - 4g^2g'^2;$$

d'où l'on tire

$$g'^2 : p'^2 :: 12g^2 : \left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 3a^2 + 4g^2;$$

donc

$$g' : p' :: 2g\sqrt{3} : \sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 3a^2 + 4g^2}$$

$$:: (3n-3)2g : \sqrt{(n+2)^2a^2 + 12(n-1)^2g^2}$$

$$:: g(6n-6) : \sqrt{(n+2)^2a^2 + 12(n-1)^2g^2},$$

ce qui est le même rapport que ci-dessus.

107. Pour trouver le rapport de n' à n, je reprends l'équation us' ou $a'p = a' \cdot \frac{n}{n+2}$. D'une autre part, considérant le dodécaèdre comme produit par un décroissement sur les angles latéraux du noyau hypothétique, nous aurons

$$a'p = \frac{1}{2n'}a' \text{ (p. 351)}.$$

Donc $$\frac{1}{2n'} = \frac{n}{n+2},$$

ce qui donne

$$n' = \frac{n+2}{2n}, \text{ et } n = \frac{2}{2n'-1}.$$

Il reste à déterminer n''. Pour y parvenir, j'observe que la diagonale oblique $a'd'$ du noyau hypothétique étant parallèle à l'arête pg du dodécaèdre, si l'on imagine que le rhombe auquel appartient la pre-

mière se meuve parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il se trouve en contact avec la seconde, il est facile de voir que le noyau hypothétique se trouvera situé à l'égard du générateur dont la coupe est *adsg*, comme un rhomboïde produit en vertu d'un décroissement inverse sur les angles *e* de ce générateur. Donc *pg* répond à la même ligne (fig. 43, pl. 18).

Donc ap (fig. 66, pl. 21) $= \frac{n''}{1 - n''} \cdot a$ (p. 371);

mais *ap* rapporté au dodécaèdre a pour expression

$$\frac{1}{n-1} \cdot a;$$

donc

$$\frac{n''}{1-n''} = \frac{1}{n-1};$$

d'où l'on tire

$$n'' = \frac{1}{n} \text{ et } n = \frac{1}{n''}.$$

Soit encore $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{2}$, $a = \sqrt{9}$, et $n = 2$. Nous aurons

$$g' : p' :: \sqrt{3} : \sqrt{5}, \; n' = 1, \text{ et } n'' = \tfrac{1}{2};$$

c'est-à-dire que le no[illegible]pothétique est semblable au rhomboïde inver[illegible]), et [illegible] le dodécaèdre peut naître du déc[illegible] E[illegible]orté à ce rhomboïde.

La variété progres[illegible]7) d[illegible]x carbonatée, dont le signe es[illegible] offre[illegible]on des [illegible] du rhomboïde dont [illegible]ec [illegible]odé-

caèdre métastatique et celles du rhomboïde contrastant, en sorte que l'on a ici une espèce de conflit entre deux noyaux hypothétiques dont chacun serait susceptible de produire le dodécaèdre.

108. Il existe parmi les cristaux d'argent antimonié sulfuré une variété qui a beaucoup de rapport avec la précédente. La forme primitive de cette substance métallique est un rhomboïde obtus (fig. 62, pl. 20), dans lequel le rapport de g à p est celui des nombres $\sqrt{5}$ à $\sqrt{3}$, ce qui donne $109^d\,28'$ pour la plus grande incidence des faces, et $70^d\,32'$ pour la plus petite. Dans le même rhomboïde, les angles plans sont l'un de $104^d\,28'$, et l'autre de $75^d\,32'$. La variété dont il s'agit, qui est représentée (fig. 68), se nomme *unibinaire*, et a pour signe $\underset{h}{\overset{2}{D}}E^{11}\underset{i}{E}$, en sorte qu'elle ne diffère de la première, relativement aux lois de la structure, que par l'absence des faces analogues à m, m' (fig. 67). En appliquant ici les formules relatives aux décroissemens sur les bords inférieurs (p. 324 et 325), on trouve pour l'incidence de h sur h (fig. 68), $144^d\,54'$, et pour celle de h sur h', $105^d\,48'$. La première de ces incidences n'excède que d'environ un demi-degré celle de r sur r (fig. 67), et la seconde de $1^d\frac{1}{3}$, celle de r sur la face adjacente à f, dans le dodécaèdre métastatique, qui résulte de la même loi $\overset{2}{D}$. Cependant la différence est de 5^d entre incidences des faces primitives, dont l'une est $109^d\,28'$, et l'autre de $184^d\,28'$. Mais cette diffé-

rence s'atténue en passant dans les résultats des décroissemens qui donnent les formes secondaires.

Si l'on cherche le rapport entre les demi-diagonales γ, π, du noyau hypothétique auxquelles appartiennent les faces *i* (fig 68), en employant les formules que nous avons données (p. 429), on trouve

$$\gamma : \pi :: \sqrt{5} : \sqrt{7},$$

ce qui donne d'une part $80^{d}\,26'$, pour l'angle plan au sommet du rhomboïde, et $99^{d}\,34'$ pour l'angle latéral; et d'une autre part $98^{d}\,13'$ pour la plus grande incidence des faces, et $80^{d}\,26'$ pour la plus petite. La loi $E^{1\,1}E$ ou $\overset{1}{e}$, d'où dérive le même rhomboïde, ne pouvant être dans le cas présent, comme pour la chaux carbonatée, celle qui produit l'inverse du générateur, si l'on cherche cette dernière à l'aide de la formule $n = \frac{g^2 + p^2}{2g^2 - 2p^2}$ (p. 398), on trouve $n = 2$, c'est-à-dire que l'inverse du véritable noyau de l'argent antimonié sulf[illegible] résulterait d'un décroissement direct par quatre [illegible] sur les angles inférieurs *e* de ce noyau. Ai[illegible]ence [illegible]rhomboïde inverse est dans le[illegible]les [illegible]naires de la structure, quoique [illegible]n [illegible]aisse aucun exemple.

109. Prenons mai[illegible]our [illegible]hypothé[illegible]ue le rhomboïde do[illegible]soi[illegible]les aux [illegible]s les moins saillant[illegible], [illegible]', etc., [illegible]décaèdre, et dési[illegible]', les

mêmes lignes que ci-dessus (p. 427), et par n, n', n'', les exposans des lois relatives aux mêmes parties, soit du générateur, soit du noyau hypothétique. Nous nous servirons de la figure 69, qui est semblable à la figure 66, avec la différence que dans la première la coupe principale $a'd's'g'$ du noyau hypothétique a ses côtés $a'd'$, $g's'$, parallèles aux arêtes dp, gu, comme cela doit être. Nous aurons égard à cette différence dans la solution du problème, qui d'ailleurs suivra la même marche que le précédent.

Cela posé, dr (fig. 69) : pr :: ln' : $a'n'$, ou

$$dr : \left(\frac{1}{n-1}+\tfrac{2}{3}\right)a = \frac{2n+1}{3n-3} :: \sqrt{\tfrac{1}{38}g'^2} : \tfrac{1}{3}a'.$$

D'une autre part,

$$dr : ur = \left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\right)a :: d'r' : u'r,$$

ou $$dr : \frac{n+2}{3n-3} :: \sqrt{\tfrac{4}{38}g'^2} : us' + \tfrac{1}{3}a'.$$

La première proportion donne

$$dr = \frac{(2n+1)a}{(n-1)a'}\sqrt{\tfrac{1}{38}g'^2},$$

et la seconde

$$dr = \frac{\frac{n+2}{3n-3}\cdot a\sqrt{\tfrac{4}{38}g'^2}}{us'+\tfrac{1}{3}a'}.$$

Egalant les deux valeurs de dr, puis réduisant,

$$\frac{2n+1}{a'} = \frac{2n+4}{3(us')+a'};$$

d'où l'on tire

$$us' = a' \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

D'une autre part,

$$us' = pu - ps' = \frac{\frac{n+1}{n-1}a - a'}{2};$$

donc

$$\frac{\frac{n+1}{n-1}a - a'}{2} = a' \cdot \frac{1}{2n+1},$$

ce qui donne

$$a' = \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{n+1}{n-1}a;$$

mais dr ou

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \frac{(2n+1)a}{(n-1)a'}\sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2}, \text{ ou } 2g = \frac{(2n+1)a}{(n-1)a'} \cdot g'.$$

Substituant à la place de a' sa valeur, nous aurons

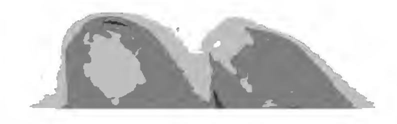
$$g' = g \cdot \frac{2n+2}{2n+3}.$$

La même valeur de a' peut être mise aussi sous cette forme,

$$\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{n+1}{n-1}a,$$

et élevant tout au carré, puis laissant la quantité p' seule dans le premier membre,

$$p' = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{1}{6n+9}\sqrt{a^2(2n+1)^2 + 12g^2(n-1)^2};$$



donc

$$g' : p' :: g(6n-6) : \sqrt{a^2(2n+1)^2+12g^2(n-1)^2},$$

rapport qui ne diffère de celui que nous avons trouvé, pour le cas précédent, que par le facteur de a^2, qui est d'une part $n+2$, et de l'autre $2n+1$.

110. Pour trouver la relation de n' à n, reprenons l'équation us' ou $a'p=\frac{a'}{2n+1}$. Si nous considérons le dodécaèdre comme le résultat d'un décroissement sur les angles latéraux du noyau hypothétique, nous aurons $a'p=\frac{1}{2n'}a'$ (p. 351). Donc $\frac{1}{2n'}=\frac{1}{2n+1}$; d'où l'on tire

$$n'=\frac{2n+1}{2} \text{ et } n=\frac{2n'-1}{2}.$$

Maintenant pour avoir n'', imaginons que le rhombe auquel appartient la diagonale $a'd'$, se meuve parallèlement à lui-même, jusqu'à ce que cette diagonale coïncide avec dp; le noyau hypothétique se trouvera situé à l'égard du générateur, comme un rhomboïde qui naîtrait d'un décroissement direct sur les angles inférieurs e de ce générateur. Donc pd répond à la même ligne (fig. 42, pl. 18). Donc

$$ap \text{ (fig. 69)} = \frac{1}{n''-1} \cdot a \text{ (p. 369)}.$$

Mais la valeur de ap rapportée au dodécaèdre est

$$\frac{1}{n-1} \cdot a; \text{ donc } \frac{1}{n''-1}=\frac{1}{n-1},$$

ce qui donne $n''=n$.

111. La chaux carbonatée nous fournit encore une application de ces divers résultats, dans une variété représentée figure 70, qui porte le nom de *dien-néaèdre*, et dont le signe est $\overset{\frac{3}{2}\;3}{\underset{ym}{De}}$. On voit, par la seule inspection de la figure, qu'elle offre l'aspect d'un solide produit par un décroissement incomplet, qui donnerait les faces y, y', en agissant sur les angles latéraux du rhomboïde auquel appartiennent les faces m, m'. Mais si l'on cherche les angles de ce solide dans l'hypothèse du véritable noyau, c'est-à-dire si l'on fait $g=\sqrt{3}$, $a=3$, et $n=\frac{2}{3}$, dans les formules relatives aux décroissemens sur les bords inférieurs (p. 324 et 325), on trouve que l'incidence de y sur y est de $134^d\,25'\,2''$, et celle de y sur y', de $108^d\,56'\,2''$. En faisant les mêmes substitutions dans l'expression générale du rapport entre les diagonales g' et p' du rhomboïde hypothétique (p. 435), on aura $g':p'::\sqrt{3}:\sqrt{17}$; de plus, la formule

$$n'=\frac{2n+1}{2} \text{ donne } n'=\frac{5}{2},$$

et à cause de $n''=n$, on a $n''=\frac{3}{2}$; c'est-à-dire que le noyau hypothétique est le rhomboïde contrastant (p. 378), et que le dodécaèdre peut être produit en vertu d'un décroissement par cinq rangées sur les angles latéraux de ce rhomboïde.

112. Si l'on imagine que les faces *gse* (fig. 61, pl. 20), *esn*, etc., en restant fixes par leurs bords *ge*,

en, etc., se relèvent par leur sommet *s*, de manière à faire des angles toujours plus petits avec l'axe du dodécaèdre, il y aura un terme où elles lui deviendront parallèles, et alors celles qui sont situées de part et d'autre d'une même arête *ge*, *en*, etc., étant de niveau, les douze faces n'en feront plus que six, qui se trouveront situées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier. Dans le même cas, les arêtes *es*, *ns*, etc., étant aussi parallèles à l'axe, chacun des deux noyaux hypothétiques se trouvera transformé en un prisme triangulaire équilatéral d'une hauteur infinie. Alors la quantité n' étant la même de part et d'autre dans les formules

$$n' = \frac{n+2}{2n} \text{ (p. 431), et } n' = \frac{2n+1}{2} \text{ (p. 435),}$$

on aura

$$\frac{n+2}{2n} = \frac{2n+1}{2},$$

ce qui donne $n = 1$, comme cela doit être, d'après ce qui a été dit (p. 341). Maintenant si l'on reprend l'une quelconque des formules qui donnent les valeurs de n', par exemple celle-ci, $n' = \frac{2n+1}{2}$, et que l'on fasse $n = 1$, on trouve $n' = \frac{3}{2}$, c'est-à-dire qu'alors le dodécaèdre est censé être produit en vertu d'un décroissement représenté par $\frac{3}{2}$, sur les angles latéraux de l'un ou l'autre noyau hypothétique. Voici ce que signifie ce résultat. Supposons que l'hexagone régulier *akodfg* (fig. 71) représente la

coupe horizontale du dodécaèdre; le triangle équilatéral *aof* représentera en même temps celle de l'un ou de l'autre des noyaux hypothétiques. Soit *kh* une perpendiculaire sur *ao*, et soit *oxz* le triangle qui est censé faire ici la fonction de mensurateur. Il sera l'analogue du petit triangle *bnm* (fig. 27, pl. 17), qui est relatif aux décroissemens sur les angles latéraux. On aura donc

$$ox : xz :: bn : nm \text{ (p. 349) } :: 2n : \sqrt{\frac{3p^2 - g^2}{p^2}}.$$

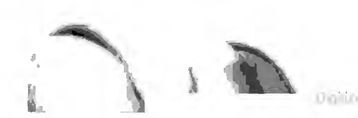
Or, dans le cas présent, $n = \frac{3}{2}$; et de plus la diagonale p étant infinie, la quantité g^2 s'évanouit. Donc

$$ox : xz \text{ (fig. 71) } :: 2n : \sqrt{\frac{3p^2}{p^2}} :: 2n : \sqrt{3} :: 3 : \sqrt{3} :: \sqrt{3} : 1,$$

ce qui s'accorde avec l'hypothèse présente, puisque ce rapport $\sqrt{3} : 1$ est celui de *oh* à *hk*, par une suite de ce que *akodfg* est un hexagone régulier. Mais ce résultat est purement idéal, le prisme triangulaire équilatéral étant exclus du nombre des formes primitives employées par la cristallisation.

II. DES DÉCROISSEMENS INTERMÉDIAIRES RELATIFS AU RHOMBOÏDE.

113. Les décroissemens nommés *intermédiaires* dépendent de deux élémens variables qui doivent entrer dans leur calcul. L'un est le rapport entre les nombres d'arêtes de molécule soustraites sur les deux côtés de l'angle vers lequel se fait le décroissement.



L'autre est le nombre de rangées soustraites, ou la distance entre le même angle et le bord de la première lame de superposition. La fraction $\frac{y}{x}$ représentera le rapport dont je viens de parler, et je continuerai de désigner par n le nombre de rangées soustraites.

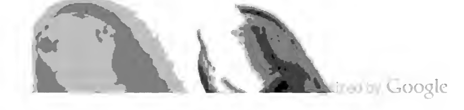
A mesure que y diminue à l'égard de x, le bord de chaque terme s'incline toujours davantage sur l'arête dont x fait partie, jusqu'à ce qu'enfin il se confonde avec cette arête, au point où y s'évanouit. D'une autre part, à mesure que y augmente à l'égard de x, le bord de chaque lame décroissante approche davantage du parallélisme avec la diagonale opposée à l'angle vers lequel se fait le décroissement, et lorsque y devient égal à x, on a un décroissement ordinaire sur les angles.

Il suit de là que cette espèce de décroissement n'est autre chose que le dernier terme de la série des décroissemens intermédiaires, en sorte que dans les formules générales qui représentent ces décroissemens, et dont la recherche est l'objet de cet article, il suffira de faire $y=x$, pour avoir les résultats relatifs aux décroissemens proprement dits sur les angles. Je n'ai pas laissé de donner des formules particulières pour ces derniers décroissemens, qui sont plus familiers à la cristallisation, parce que l'usage de ces formules revenant à chaque instant, il est plus commode de les trouver toutes préparées, sans être obligé de les simplifier, en faisant disparaître x et y.

Les décroissemens intermédiaires relatifs au rhomboïde peuvent agir, soit sur les angles latéraux E, et cela de deux manières différentes, suivant que *x* répond aux bords inférieurs D, et *y* aux bords supérieurs B, ou que c'est l'inverse qui a lieu; soit sur l'angle inférieur *e*, soit sur l'angle supérieur A. Dans ces derniers décroissemens, *x* et *y* répondent toujours l'un et l'autre aux deux bords D ou B, adjacens à l'angle qui subit le décroissement. Je vais exposer successivement les résultats relatifs à ces quatre modifications.

I. *Décroissemens intermédiaires sur les angles* E, x *étant dans le sens de* D, *et* y *dans le sens de* B.

114. Soit *audb* (fig. 72, pl. 21) une des faces supérieures du rhomboïde qui fait la fonction de générateur, et $\gamma\lambda$, $\pi\zeta$ deux parallèles aux bords produits par le décroissement. Il est facile de concevoir qu'ici comme dans les décroissemens ordinaires sur les angles latéraux, le solide secondaire sera en général un dodécaèdre à triangles scalènes. Soit XH (fig. 73) ce dodécaèdre, et *as* le noyau rhomboïdal qui lui est inscrit; soit de plus *adsg* (fig. 74) la coupe principale du noyau; soient *gx*, *gh*, les mêmes arêtes que QX, QH (fig. 73), dont la dernière passe par l'angle *d*, et l'autre se forme à une certaine distance au-dessus de la diagonale *ad* (fig. 74). Quant aux lignes *vx*, *vh*, elles représentent les arêtes opposées aux précédentes sur le dodécaèdre. Menons *dp* parallèle à *qx*;



elle sera située comme la diagonale oblique d'un rhomboïde résultant d'un décroissement sur l'angle *d*, dans lequel la distance d'une lame à l'autre, prise dans le sens de *da*, serait la même que pour le dodécaèdre dont il s'agit. Soit *dkf* le triangle mensurateur rapporté au plan *pds*; *kf* représentera une arête de molécule, c'est-à-dire que si nous désignons par g' la demi-diagonale horizontale, et par p' la demi-diagonale oblique de la molécule, nous aurons

$$kf = \sqrt{g'^2 + p'^2}.$$

Reste à trouver l'expression de *dk*.

Pour y parvenir, concevons que la position de la ligne $\gamma\lambda$ (fig. 72) soit relative au cas où il n'y aurait qu'une rangée de soustraite par l'effet du décroissement intermédiaire sur l'angle *u*. Menons $\lambda\mu$ parallèle à *da*, $\gamma\pi$ perpendiculaire sur $\lambda\mu$, $d\varepsilon$ parallèle à $\gamma\lambda$, puis ayant pris $\varepsilon\vartheta$ égale à $u\gamma$, menons $\vartheta\nu$ parallèle à $d\varepsilon$, et enfin $\nu\varphi$ parallèle à *au*. Il est clair que $d\varepsilon$, et enfin $\nu\vartheta$ répondront aux bords de deux lames consécutives, et par conséquent $d\nu$ sera la distance d'une lame à l'autre, prise dans le sens de *da*, en ne supposant toujours qu'une rangée de soustraite. Ainsi l'on aura $d\nu . n = dk$ (fig. 74). La question se réduit donc à trouver l'expression algébrique de $d\nu$ (fig. 72).

Or, $\lambda\mu$ mesure autant de fois la demi-diagonale oblique d'une molécule, qu'il y a d'arêtes de molécule contenues dans $u\lambda + u\mu = 2x\sqrt{g'^2 + p'^2}$; donc

on peut représenter $\lambda\mu$ par $2p'x$. D'une autre part,

$$\omega\nu = \varepsilon\vartheta = u\gamma = y\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

Or, les triangles semblables $\omega\nu d$, $\gamma\mu\lambda$, donnent

$$\gamma\mu : \lambda\mu :: \omega\nu : d\nu,$$

ou

$$(x-y)\sqrt{g'^2+p'^2} : 2p'x :: y\sqrt{g'^2+p'^2} : d\nu = \frac{2p'xy}{x-y}.$$

Donc

$$dk\ (\text{fig. } 74) = \frac{2p'nxy}{x-y};$$

donc

$$dk : kf :: \frac{2p'nxy}{x-y} : \sqrt{g'^2+p'^2};$$

ou, parce que les dimensions de la molécule sont proportionnelles à celles du noyau,

$$dk : kf :: \frac{2pnxy}{x-y} : \sqrt{g^2+p^2}.$$

Si nous prolongeons ga jusqu'à la rencontre y de dp, nous aurons aussi

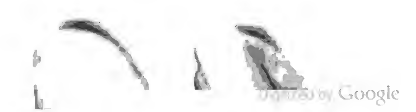
$$da : ay :: \frac{2pnxy}{x-y} : \sqrt{g^2+p^2} :: 2p : \frac{x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc, puisque $da = 2p$, nous aurons

$$ay = \frac{x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2}.$$

115. Cherchons aussi le prolongement $a\nu$ de da, jusqu'à la rencontre de νx.

Soit as (fig. 75) le même générateur que fig. 74;



soient *tm*, *d*ψ, les lignes de départ du décroissement considéré sur la face *audb*, et *tu* celle qui leur correspond vers l'angle *b* considéré sur la face *abng*. Bornons-nous à considérer ce qui se passe à l'égard de *tm* et *tu*, et menons *my*, *ty*, *ue*, *te*, de manière que les plans *tmy*, *tue* soient parallèles aux faces CXQ, CXB (fig. 73). Soient enfin *mftb* (fig. 75), *rtbu*, *mlyb*, *bexu*, les parallélogrammes qui ont pour diagonales les lignes *tm*, *tu*, *my*, *eu*. Nous aurons $ez=by$, et $yz=be$. Menons la diagonale *bz* du rhombe *bezy*, et par le point *c* où elle coupe *ue* et *my*, menons *ct*. Il est aisé de voir que le triangle *bct* est semblable au triangle *vag* (fig. 74). Car si l'on suppose que le rhomboïde *as* (fig. 75) soit tourné de manière que l'angle *b* coïncide avec l'angle *g* (fig. 74), *bc* (fig. 74) tombera sur *gs* (fig. 74), *bt* sur *ga*, et *ct* sera parallèle à l'intersection *vx* des deux faces qui se réunissent sur cette même arête.

Or *bm* et *bt* (fig. 75) renferment autant de fois, l'une la quantité $x\sqrt{g'^2+p'^2}$, et l'autre la quantité $y\sqrt{g'^2+p'^2}$, qu'il y a de rangées soustraites; donc

$$bm=nx\sqrt{g'^2+p'^2},\ \text{et}\ bt=ny\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

De plus, *by* étant égale à la différence en hauteur entre deux lames consécutives de superposition, prise dans un sens parallèle à *bn*, il est visible que *by* est égale à *kf* (fig. 74). Donc $by=\sqrt{g'^2+p'^2}$.

Les triangles semblables bmc, yzc (fig. 75), donnent

$$bm : yz = by :: bc : cz, \text{ ou } bm : by :: bc : bz - bc.$$

Substituant les valeurs algébriques, et faisant attention que $bz = 2p'$, par une suite de ce que

$$by = \sqrt{g'^2 + p^2},$$

on aura

$$nx\sqrt{g'^2 + p'^2} : \sqrt{g'^2 + p'^2} :: bc : 2p' - bc;$$

d'où l'on tire

$$bc = \frac{2p'nx}{nx + 1}.$$

Donc

$$bt : bc :: ny\sqrt{g'^2 + p'^2} : \frac{2p'nx}{nx + 1} :: \sqrt{g'^2 + p'^2} : \frac{2p'x}{nxy + y}$$
$$:: \sqrt{g^2 + p^2} : \frac{2px}{nxy + y}.$$

Mais

$$bt : bc :: ag = \sqrt{g^2 + p^2} : av \text{ (fig. 74)};$$

donc $$av = \frac{2px}{nxy + y}.$$

116. Cherchons encore ap et ax.

1°. Pour ap. Les triangles semblables pay, psd, donnent $$ap : ay :: ap + as : ds,$$

ou

$$ap : \frac{x - y}{nxy}\sqrt{g^2 + p^2} :: ap + a : \sqrt{g^2 + p^2};$$

d'où l'on tire

$$ap = \frac{x - y}{nxy - x + y} . a.$$

2°. Pour ax. Les triangles $xa\nu$, xsg, étant semblables, on a

$$ax : a\nu :: ax + as : sg,$$

ou

$$ax : \frac{2px}{nxy + y} :: ax + a : 2p;$$

ce qui donne

$$ax = \frac{x}{nxy - x + y} . a.$$

117. Avant d'appliquer les données précédentes, j'observe que si l'on fait passer dans le dodécaèdre six plans coupans, dont chacun coïncide avec deux arêtes latérales contiguës, telles que CQ, CB, ces plans intercepteront un rhomboïde inscrit dans le dodécaèdre, comme le rhomboïde calcaire primitif l'est dans le cristal métastatique (*voyez* p. 41).

J'ai à prouver que ce rhomboïde peut être substitué, comme noyau hypothétique, au générateur, de manière à en faire dériver le dodécaèdre, par une loi ordinaire de décroissement sur les bords inférieurs, et que le même rhomboïde est susceptible à son tour d'être produit par le générateur comme forme secondaire.

Cherchons d'abord les expressions des demi-diagonales g' et p' du rhomboïde dont il s'agit. Soit $\gamma q \varepsilon \nu$

(fig. 74) sa coupe principale. La ligne qe, perpendiculaire sur l'axe, étant représentée par $\sqrt{\frac{4}{3}g'^2}$, son expression en fonction de x, y, a et p, nous donnera la valeur de g'.

Or, d'une part, $dr:hr::qe:eh$, et d'une autre part, $dr:pr::qe:ex$; donc $eh:ex::hr:pr$.

Ayant trouvé le rapport entre eh et ex, et connaissant la somme $as+2ax$ de ces quantités, nous en déduirons la valeur de $2h$, qui, étant mise à sa place dans la première des proportions précédentes, nous donnera l'expression de qe.

Maintenant

$$hr=ax+\tfrac{1}{3}a=\frac{x}{nxy+y-x}.a+\tfrac{1}{3}a=\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}a;$$

$$pr=ap+\tfrac{2}{3}a=\left(\frac{x-y}{nxy+y-x}+\frac{2}{3}\right)a=\frac{2nxy+x-y.}{3nxy-3x+3y.}a;$$

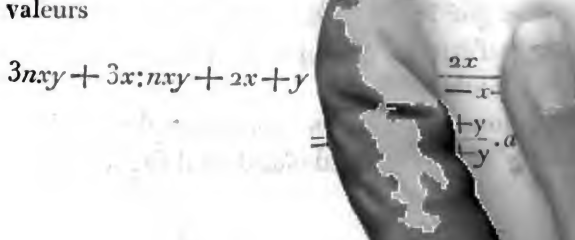
donc

$$eh:ex::nxy+2x+y:2nxy+x-y.$$

Maintenant, soit $nxy+2x+y=m'$, et .... $2nxy+x-y=n'$. Nous aurons

$$m'+n':m'::hx=as+2ax:eh;$$

et mettant à la place de m' n', as et ax, leurs valeurs



$3nxy+3x:nxy+2x+y$ ...

donc la proportion $dr:hr::qe:eh$ deviendra

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}.a::qe:a\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}.\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3x}\right);$$

ou $$g:\tfrac{1}{3}::g':\frac{nxy+x+y}{3nxy+3x};$$

d'où l'on tire

$$g'=g.\frac{nxy+x+y}{nxy+x}.$$

Pour avoir la valeur de p', commençons par chercher celle de $\gamma\varepsilon$ ou de a', qui est le triple de la différence entre eh et ex.

Nous avons eu plus haut

$$eh:ex::nxy+2x+y:2nxy+x-y;$$

donc

$$eh+ex:eh-ex::3nxy+3x:x+2y-nxy.$$

Mais

$$eh+ex \quad \text{ou} \quad hx=\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}.a.$$

Substituant cette valeur à la place de $eh+ex$, et $\frac{1}{3}a'$ à la place de $eh-ex$, nous aurons

$$\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}.a:\tfrac{1}{3}a'::3nxy+3x:x+2y-nxy;$$

d'où l'on tire

$$a'=a.\frac{x+2y-nxy}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y};$$

donc

$$9p'^2-3g'^2=a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy+y}\right)^2\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right)^2.$$

Et mettant à la place de g'^2 sa valeur $g^2\left(\frac{nxy+x+y}{nxy+x}\right)^2$,
puis dégageant p'^2 et simplifiant,

$$p'^2=\left[\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-2+y}\right)^2+\tfrac{1}{36}g^2\right]\left(\frac{x+nxy+y}{nxy+x}\right)^2;$$

donc

$$g':p'::g:\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)^2+\tfrac{1}{36}g^2}.$$

118. Voyons maintenant s'il est possible que le dodécaèdre résulte d'un décroissement sur les bords inférieurs du noyau hypothétique. Soit N le nombre de rangées soustraites. On aura $\gamma x=\frac{1}{N-1}.a'$. Or,

$$\begin{aligned}\gamma x&=\tfrac{1}{2}(hx-a')\\&=\tfrac{1}{2}a\left[\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}-\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy+x}\right)\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right)\right]\\&=a\left(\frac{nxy-y}{nxy+x}\cdot\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right).\end{aligned}$$

Donc l'équation $\gamma x=\frac{1}{N-1}.a'$ devient

$$a\left(\frac{nxy-y}{nxy+x}\cdot\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right)=\frac{1}{N-1}.a\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy+x}\cdot\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right),$$

ou

$$nxy-y=\frac{1}{N-1}(x+2y-nxy);$$

d'où l'on tire $N=\frac{nxy-y}{x+y}$. Donc, puisque x, y et n sont des quantités rationnelles, il y aura toujours pour N une valeur qui sera elle-même rationnelle.



La formule précédente donne aussi $n = \frac{Ny + x + y}{Nxy}$.

119. Le dodécaèdre étant également susceptible d'être produit, comme forme secondaire, par le générateur et par le noyau hypothétique, nous pouvons déjà en conclure que ce dernier est lui-même forme secondaire relativement au générateur. Mais pour le prouver directement, concevons que les lignes $\nu\gamma$, $\nu\varepsilon$, $q\varepsilon$, γq, se meuvent parallèlement à elles-mêmes, en s'éloignant du centre, jusqu'à ce que le quadrilatère *adsg* se trouve inscrit dans le quadrilatère $\gamma q\varepsilon\nu$, comme on le voit figure 76. S'il existe un décroissement admissible, en vertu duquel le générateur puisse produire le noyau hypothétique, on voit, à la seule inspection de la figure, que ce décroissement doit agir par renversement sur les angles inférieurs du générateur. Soit n' le nombre de rangées soustraites. Nous aurons cette série de rapports :

$$\nu y' \text{ (fig. 74)} : \gamma'\gamma :: \nu' y' \text{ (fig. 76)} : y'\gamma' :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{2}{3}a'$$
$$:: gu : u\gamma' :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \left(\tfrac{1}{3} + \frac{n'}{1-n'}\right) a ;$$

donc

$$g' : 2a' :: g : \frac{2n'+1}{1-n'} \cdot a.$$

Mais en comparant les valeurs de g' et de a', que nous avons données plus haut (p. 447), on en conclura que

$$g' : 2a' :: g : 2a\left(\frac{x + 2y - nxy}{nxy - x + y}\right);$$

donc

$$g : \frac{2n'+1}{1-n'}a :: g : 2a\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right).$$

et

$$2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)=\frac{2n'+1}{1-n'},$$

d'où l'on déduit

$$n'=\frac{x+y-nxy}{2y},$$

ce qui indique la possibilité du cas dont il s'agit.

La figure 74 a été tracée d'après la condition que la diagonale oblique $\gamma\nu$ du noyau hypothétique diverge moins avec l'axe hx que l'arête ag du générateur. Nous verrons plus bas qu'il peut arriver que ce soit le contraire qui ait lieu, et que dans ce cas la même formule peut être encore employée pour déterminer la valeur de n'.

120. Il nous reste à trouver les formules qui donnent les incidences mutuelles des faces du dodécaèdre, aux endroits des arêtes QX (fig. 73), CX, BX, etc. Si nous menons les lignes BQ, CN, qui seront les diagonales horizontales de deux faces du noyau hypothétique, et si des points ω, λ, situés au milieu de ces diagonales, nous menons $\omega\mu$, $\lambda\vartheta$, perpendiculaires l'une sur CX, et l'autre sur le prolongement de QX, le sinus de la moitié de la plus grande incidence des faces du dodécaèdre sera au cosinus :: $B\omega : \omega\mu$; et le sinus de la moitié de la plus petite incidence sera au cosinus :: $C\lambda : \vartheta\lambda$.

Or, les quantités g, p, x, y, n, étant supposées être



connues, il est facile, d'après les formules données plus haut, d'en déduire les expressions de g', p', N, et parce que Bω ou Cλ est égale à g', on pourra trouver les incidences cherchées, en considérant le dodécaèdre comme produit par un décroissement sur les bords inférieurs du noyau hypothétique, et en se servant des formules ordinaires relatives à cette espèce de décroissement (p. 324 et suiv.). Mais pour donner aussi une solution directe du même problème, nous allons chercher les expressions des rapports entre les sinus et les cosinus des angles du dodécaèdre, en fonctions de g, p, n, x, y.

Commençons par le rapport entre Bω et $\omega\mu$. Nous avons déjà Bω ou

$$g' = g \cdot \frac{x + nxy + y}{nxy + y};$$

donc tout se réduit à trouver la valeur de $\omega\mu$. Si nous menons $\gamma\delta$ (fig. 74) sur νx, elle sera le double de $\omega\mu$. Or, les triangles semblables $\gamma\delta x$, gux, donnent $gx : gu :: \gamma x : \gamma\delta$.

Mais

$$gx = \sqrt{(ux)^2 + (gu)^2} = \sqrt{(hr)^2 + (gu)^2},\ gu = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

$$hr = ax + \tfrac{1}{3}a = \frac{nxy + 2x + y}{3nxy + 3y - 3x} \cdot a;$$

donc

$$gx = \sqrt{\left(\frac{nxy + 2x + y}{3nxy + 3y - 3x}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2},$$

$$\gamma x = a\left(\frac{nxy - y}{nxy + x} \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy - x + y}\right).$$

Mettant à la place de gx, gu, et γx leurs valeurs, et prenant la valeur de $\frac{1}{2}\gamma\delta$, on a

$$\omega\mu = \tfrac{1}{2}a\,\frac{\left(\frac{2nxy-2y}{nxy+x}\cdot\frac{x+nxy+y}{nxy-x+y}\right)\sqrt{\frac{1}{3}g^2}}{\sqrt{\left(\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}\right)^2 a^2+\frac{4}{3}g^2}}$$

Les valeurs de Bω et de $\omega\mu$ ayant pour facteurs communs les quantités g et $\frac{x+nxy+y}{nxy+x}$, si l'on supprime celles-ci, on aura

$$B\omega : \omega\mu :: 1 : \tfrac{1}{2}a\,.\,\frac{\frac{2nxy-2y}{nxy-x+y}\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\left(\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}\right)^2 a^2+\frac{4}{3}g^2}}$$

$$:: \sqrt{\left(\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}\right)^2 a^2+\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{1}{2}a\,.\,\frac{2nxy-2y}{nxy-x+y}\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$:: \sqrt{(nxy+2x+y)^2\tfrac{1}{3}a+(nxy+y-x)^2 4g^2}$$

$$: (nxy-y)\sqrt{a^2}.$$

Maintenant, pour avoir le rapport entre Cλ et $\lambda\vartheta$ (fig. 73), il suffit de trouver la valeur de $\lambda\vartheta$, parce que Cλ = Bω, dont nous connaissons déjà la valeur. $\lambda\vartheta$ (fig. 74) étant la même ligne que fig. 73, du point ϵ (fig. 74) menons $\epsilon\zeta$ perpendiculaire sur $x\zeta$, et qui sera le double de $\lambda\vartheta$. Les triangles semblables pdr, $x\epsilon\zeta$, donnent $dp : dr :: \epsilon x : \epsilon\zeta$; mais

$$dp = \sqrt{(pr)^2+(dr)^2},\quad dr = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2},\quad pr = ap+\tfrac{2}{3}a$$
$$= \frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}a;$$



donc

$$dp=\sqrt{\left(\frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}\right)^2 a^2+\tfrac{4}{3}g^2};$$

$$\varepsilon x=a'+\gamma x=a.\frac{x+2y-nxy}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}$$
$$+a.\frac{nxy-y}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}$$
$$=a.\frac{x+y}{nxy+x}\times\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}.$$

Mettant à la place de dp, dr et εx leurs valeurs, et prenant la moitié de celle de $\varepsilon\zeta$, on trouve

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon\zeta \text{ ou } \lambda\vartheta=a\frac{\left(\frac{x+y}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right)\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}}{\sqrt{\left(\frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}\right)^2 a^2+\tfrac{4}{3}g^2}}.$$

Comparant les valeurs de $C\lambda$ et de $\lambda\vartheta$ (fig. 73 et 74), et faisant attention qu'elles ont pour facteur commun la quantité $g.\frac{nxy+x+y}{nxy+y}$, que l'on peut supprimer, on aura

$$C\lambda:\lambda\vartheta::1:a.\frac{\frac{x+y}{nxy-x+y}\sqrt{\tfrac{1}{3}}}{\sqrt{\left(\frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}\right)^2 a^2+\tfrac{4}{3}g^2}}$$
$$::\sqrt{\left(\frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}\right)^2 a^2+\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{x+y}{nxy-x+y}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}$$
$$::\sqrt{(2nxy+x-y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy-x+y)^2 4g^2}$$
$$:(x+y)\sqrt{a^2}.$$

121. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le dodécaèdre tournait ses arêtes les plus saillantes QX, BX, etc. (fig. 73), vers les faces du générateur, ou, ce qui revient au même, que *eh* (fig. 74) était plus grande que *ex*. Les choses étant dans cet état, si l'on imagine que la quantité n vienne à augmenter progressivement, les arêtes QX, BX, etc. (fig. 73), deviendront moins saillantes, tandis que les intermédiaires CX, NX, prendront plus de saillie, et il y aura un terme où les unes et les autres faisant avec l'axe HX des angles égaux, le dodécaèdre se trouvera composé de deux pyramides droites réunies base à base. On aura donc alors *eh* (fig. 77) $=ex$, ou $hr=pr$, ou algébriquement $nxy+2x+y=2nxy+x-y$; d'où l'on tire

$$n=\frac{x+2y}{xy}.$$

Ainsi, il y aura toujours une loi susceptible de satisfaire au cas dont il s'agit.

Si dans l'équation $N=\frac{x+y}{nxy-y}$ on met à la place de n sa valeur $\frac{x+2y}{xy}$, relative à ce même cas trouve $N=1$. C'est effectivement ce qui doit car γx (fig. 74) étant alors égale à ex (fig. 7 quation $\gamma x=\frac{1}{N-1}a'$ devient $ex=\frac{1}{N-}$ parce que le hypothétique se trouv un simple la base commune

pyramides, a' s'évanouit; donc

$ex = \frac{o}{N-1}$; donc $(N-1)\,ex = o$, ou $N-1 = o$, ce qui donne $N = 1$.

122. A mesure que le dodécaèdre approche du terme où il se trouve composé de deux pyramides droites, la diagonale oblique $\gamma\nu$ (fig. 74) du noyau hypothétique diverge de plus en plus avec l'axe, et il y a un point où elle devient parallèle à l'arête ag du générateur. Alors la quantité n' s'évanouit, c'est-à-dire que dans l'équation $n' = \frac{x+y-nxy}{2y}$ on a

$$x+y-nxy=o, \text{ et } nxy=x+y;$$

d'où il suit que le cas dont il s'agit a lieu lorsque

$$n=\frac{x+y}{xy}.$$

Au-delà du même terme, la diagonale $\gamma\nu$ faisant avec l'axe un angle plus ouvert que l'arête ag, le décroissement en vertu duquel le générateur produirait le noyau hypothétique ne peut plus se faire sur l'angle e de ce générateur. Il a lieu par renversement ur l'angle A. Mais la formule $n' = \frac{x+y-nxy}{xy}$ ayant même propriété que celle qui a été donnée pour lécroissemens ordinaires (p. 373), avertit d'abord changement, en donnant pour n' une quantité e, et cette quantité prise avec un signe con- présente la loi du décroissement.

123. Pendant les variations que nous venons de considérer, n continuant d'augmenter, le point v monte de plus en plus, tandis que le point q s'abaisse : alors le dodécaèdre tourne ses arêtes les moins saillantes, telles que qx, hv (fig. 78), vers les diagonales obliques du générateur, et ses arêtes les plus saillantes vx, qh, vers les bords supérieurs du même générateur. Le noyau hypothétique dont $q\gamma v\varepsilon$ représente la coupe principale se trouve alors dans une position renversée, relativement à celle qu'il avait d'abord (fig. 74), c'est-à-dire que ses diagonales obliques γq, εv, et ses arêtes supérieures γv, εq, correspondent à celles du générateur.

Dans le même cas ex est plus grande que eh, et si l'on cherche les valeurs de g' et de p', en opérant comme ci-dessus, on verra d'abord que celle de g' reste la même, c'est-à-dire que

$$g' = g \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy + x}.$$

Mais pour avoir celle de p', il faudra mettre $ex - eh$ à la place de $eh - ex$, ou $nxy - x - 2y$, à la place de $x + 2y - nxy$, et l'on trouvera d'abord

$$a' = a \cdot \frac{nxy - x - 2y}{nxy + x} \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy - x + y},$$

puis

$$p'^2 = \left[\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy - x - 2y}{nxy - x + y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2\right]\left(\frac{x + nxy + y}{nxy + x}\right)^2;$$

donc

$$g' : p' :: g : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy - x - 2y}{nxy - x + y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2},$$

valeurs qui ne diffèrent des premières que par la substitution de $nxy - x - 2y$ à $x + 2y - nxy$, provenant de celle de $ex - eh$ à $eh - ex$, et qui dépend d'un simple changement dans les signes $+$ et $-$ des quantités du numérateur.

124. En procédant d'après la même substitution, relativement à la valeur de N, on aura $N = \frac{nxy - y}{x + y}$, quantité qui n'est autre chose qu'une inversion de celle à laquelle conduit la supposition de eh plus grande que ex. On tire de la même formule

$$n = \frac{Nx + Ny + y}{xy}.$$

Pour trouver n', on partira du rapport

$$qe : e\gamma \text{ (fig. 74)} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{a'^2};$$

mais d'une autre part, le décroissement qui donne le noyau hypothétique ayant lieu sur l'angle A du générateur, on aura

$$qe : e\gamma :: (n' + 1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n' - 1}{3}\sqrt{a^2} \text{ (p. 311)};$$

donc

$$g' : 2\sqrt{a'^2} :: (n' + 1)g : (2n' - 1)\sqrt{a^2}.$$

Substituant aux rapports entre g' et g, et entre a' et a ceux de leurs valeurs algébriques, on aura

$$nxy + x + y : 2\left(\frac{nxy - x - 2y}{nxy + x}\right) :: (n' + 1)(nyx + x)$$

$$: (2n - 1)\frac{n2x - x + y}{nxy + x + y};$$

d'où l'on déduit

$$n' = \frac{nxy - x - y}{2y},$$

expression qui ne diffère encore de celle que nous avons obtenue (p. 450) que par le changement de + en — et de — en + dans le numérateur.

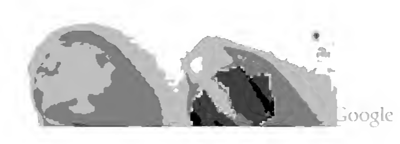
Mais il n'y a aucun changement à faire entre les sinus et les cosinus des incidences des faces du dodécaèdre, en sorte que relativement à celle des faces CXQ, CXB, qui dans l'hypothèse présente sont les moins inclinées l'une sur l'autre, le sinus sera encore au cosinus

$$:: \sqrt{(nxy+2x+y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy+y-x)^2 4g^2} : (nxy-y)\sqrt{a^2},$$

et que relativement à l'incidence des faces NXQ, CXQ, qui maintenant sont les plus inclinées entre elles, le sinus sera toujours au cosinus

$$:: \sqrt{(2nxy+x-y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy-x+y)^2 4g^2} : (x+y)\sqrt{a^2}.$$

Je vais en donner la raison, en prenant pour exemple ce dernier rapport. Soit *on* (fig. 74) une ligne menée du milieu *o* de la diagonale *ad*, perpendiculairement sur l'arête *qx*. Le rapport dont il s'agit sera le même que celui de la demi-diagonale *g* du rhombe *abdu* (fig. 73) à la perpendiculaire *on* (fig. 74). Or, pendant toutes les variations que subit le rhomboïde, soit que l'on ait *eh* plus grande que *ex*, ou *ex* plus grande que *eh*, *g* est constante, et la ligne *on*, en restant fixe par son extrémité *o*, ne fait autre chose



que varier dans sa direction et dans sa longueur. Donc les quantités dont est composé le rapport conservent leurs fonctions, en sorte que n change seulement de valeur. Le même raisonnement s'applique à la ligne $f'i$, menée du milieu de gs perpendiculairement sur le prolongement de xg, et considérée comme cosinus de l'inclinaison relative au premier rapport, dans lequel on a aussi pour sinus la demi-diagonale g du générateur.

125. Dans la construction représentée par la figure 74, le noyau hypothétique a ses demi-diagonales g' et p' dans un rapport différent de celui des demi-diagonales g et p du générateur. Or, à mesure que le dodécaèdre approche de l'état où il se trouve composé de deux pyramides droites, le rapport $g':p'$ diffère de moins en moins du rapport $g:p$, en sorte qu'il y a un terme où les deux rapports deviennent égaux, c'est-à-dire qu'alors le noyau hypothétique est semblable au générateur. On a donc alors (p. 448)

$$g^2:p^2::g^2:\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g^2,$$

ou

$$p^2=\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g^2;$$

d'où l'on tire

$$3p^2-g^2=\tfrac{1}{3}a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)^2.$$

Mais

$$3p^2-g^2=\tfrac{1}{3}a^2;$$

donc

$$\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}=1\,;$$

d'où l'on déduit

$$n=\frac{2x+y}{2xy}.$$

Ainsi, il y aura toujours une loi susceptible de remplir la condition proposée.

Connaissant la loi qui donne le dodécaèdre rapporté au noyau hypothétique, il est facile de trouver les valeurs numériques de p, x et y dans la supposition présente. Car si l'on considère le noyau hypothétique comme faisant à son tour les fonctions de générateur, et celui-ci comme étant le noyau hypothétique, la loi qui le donne sera désignée par N, qui est censé connu, et celle qui donne le noyau hypothétique aura n pour exposant. Or, d'une part,

$$n=\frac{Ny+x+y}{Nxy},$$

à l'ordinaire (p. 449). Mais à cause de la similitude entre les deux noyaux, $n=\frac{2x+y}{2xy}$. Donc

$$\frac{Ny+x+y}{N}=\frac{2x+y}{2}\,;$$

d'où l'on tire

$$x:y::N+2:2N-2.$$

Ayant trouvé les valeurs numériques de x et y, et les substituant dans l'équation $n=\frac{2x+y}{2xy}$, on aura l'expression numérique de n.



126. Supposons maintenant $eh = 2\,(ex)$. Dans ce cas, le solide secondaire sera un rhomboïde qui aura la ligne *qe* pour perpendiculaire sur l'axe. On aura donc $nxy + 2x + y = 2(2nxy + x - y)$ (*voyez* p. 446), d'où l'on tire $n = \frac{1}{x}$, expression qui aura toujours lieu, quelque valeur que l'on donne à y. Voici ce que signifie ce résultat. Soit *an* (fig. 79) un rhomboïde qui ait ses sommets en *a* et en *n*. Supposons un décroissement ordinaire par plus d'une rangée sur l'angle *bdf*, et soit *osr* un plan parallèle à la face qui en résultera. Ce décroissement en entraînera deux intermédiaires sur les angles *bdn*, *fdn*, des faces adjacentes; et il est facile de voir que si l'on considère, par exemple, celui qui a lieu sur l'angle *bdn*, on aura $do = x$, $ds = y$. De plus, le décroissement se fera en hauteur, de manière que *dr* représentera le nombre de rangées soustraites dans le même sens. Donc si l'on désigne par n la distance entre *d* et *os*, on aura $n = \frac{1}{dr}$. Mais $dr = do = x$; donc $n = \frac{1}{x}$, ce qui aura toujours lieu, quelle que soit la valeur de *ds* ou de y. Le cas dont il s'agit ici se rapporte donc implicitement à l'effet d'un décroissement ordinaire, dans lequel le décroissement intermédiaire agit subsidiairement.

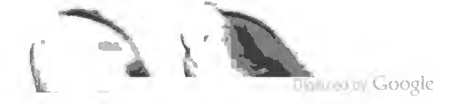
Si l'on fait $x = 2$, on aura $n = \frac{1}{2}$. Supposons de plus $y = 1$. On trouve dans ce cas

$$ap\ (\text{fig. } 74) = \tfrac{1}{6}\sqrt{a^2}\ (\text{p. } 445),$$

ce qui indique que l'axe du rhomboïde est infini ; et ainsi les faces produites sont disposées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier. Ce cas est celui de la chaux carbonatée prismatique, dans laquelle les décroissemens intermédiaires qui secondent l'effet du décroissement principal ont lieu, en effet, par des soustractions de deux rangées en hauteur. C'est ce que l'on concèvra aisément, si l'on fait attention que le décroissement principal ayant lieu par deux rangées, on a (fig. 79) do ou $y=2$, et $dr=2$; donc n ou $\frac{1}{dr}=\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$. A l'égard de ds ou de y, il est visible qu'elle égale l'unité.

127. Pour faire quelques applications, je commence par la variété de chaux carbonatée que j'ai nommée *paradoxale*, et qui est représentée (fig. 80). Son signe est $(\underset{x}{E^{\prime\prime}E}B^{\prime}D^{2})\underset{r}{\overset{2}{D}}\underset{f}{E^{\prime\prime}}E$, c'est-à-dire que les faces x, x, étant celles qui sont données par le décroissement intermédiaire, les faces r, r appartiennent au dodécaèdre métastatique, et les faces f, f au rhomboïde inverse.

On a donc, dans le cas présent, $x=2$, $y=1$, $n=1$. La quantité n étant ici plus petite que la fraction $\frac{5}{2}$, donnée par la formule $n=\frac{x+2y}{xy}$, relative au cas du dodécaèdre à double pyramide droite (p. 454), on voit que le solide produit par le décroissement intermédiaire tourne ses arêtes les plus saillantes vers les



faces du générateur, comme dans la figure 73, où, ce qui revient au même, *eh* est plus grande que *ex* (fig. 74).

Si l'on cherche, d'après les données précédentes, le rapport entre les demi-diagonales g', p', du noyau hypothétique, on trouvera (p. 448) $g':p'\ \sqrt{3}:\sqrt{15}$, d'où l'on conclura que ce noyau est semblable au rhomboïde inverse. Dans le même cas, la formule $N=\frac{x+y}{nxy-y}$ (p. 448) donne $N=3$, d'où il suit que le dodécaèdre est susceptible d'être produit en vertu d'un décroissement par trois rangées sur les bords inférieurs du noyau hypothétique.

De plus, la formule $n'=\frac{x+y-nxy}{2y}$ donne $n'=\frac{1}{2}$, ce qui fait connaître que le noyau hypothétique peut résulter d'un décroissement par une rangée sur les angles inférieurs du générateur; et telle est effectivement la loi qui convient au rhomboïde inverse.

Si dans le rapport de $B\omega$ à $\omega\mu$ (p. 452) on substitue les valeurs de x, y, a, g, on trouve

$$B\omega:\omega\mu::\sqrt{53}:\sqrt{3},$$

ce qui donne pour l'incidence de CXB sur CXQ (fig. 73) 153^d 13′ 58″; et si l'on fait les mêmes substitutions dans le rapport de $C\lambda$ à $\lambda\vartheta$ (p. 453), on trouve $C\lambda:\lambda\vartheta::\sqrt{29}:\sqrt{27}$, ce qui donne 92^d 3′ 10″ pour l'incidence de CXQ sur NXQ.

Il est remarquable que les plus longs bords des

faces r, r (fig. 80), qui appartiennent au métastatique soient parallèles entre eux. Cette propriété dépend de ce que l'arête o, qui est parallèle à qx (fig. 74), a la même inclinaison que l'arête dp (fig. 6, pl. 16) qui lui correspond sur le métastatique. Car on a, dans ce dernier cas, $ap=a=3$, et $ar=\frac{2}{3}a=2$. Donc $pr=5$. De plus, $dr=\sqrt{\frac{4}{3}g^2}=\sqrt{\frac{4}{3}.3}=2$; donc $dp:pr::2:5$. Maintenant, dans la fig. 74, on a aussi

$$dr=2,\ ar=2,\ ap=\frac{x-1}{nxy-x+y}.a(\text{p. } 445)=3.$$

Donc aussi $pr=5$, ce qui conduit au parallélisme dont j'ai parlé.

128. Si l'on observe attentivement la forme de la variété qui nous occupe, on trouve que la substitution d'un noyau hypothétique au générateur, est en quelque sorte aidée par l'aspect des facettes f, f, qui sont celles d'un rhomboïde semblable à ce noyau. Mais, d'une autre part, les facettes r, r, appartiennent au métastatique, et leurs arêtes inférieures l, l, sont dans le sens des arêtes latérales du générateur. Le cristal porte donc l'empreinte de deux noyaux, l'un réel, l'autre hypothétique, relatifs aux deux dodécaèdres; et quoique la cristallisation n'ait travaillé que sur le premier noyau, elle se prête, relativement au second, à un résultat idéal, plus simple que celui qui a lieu en effet, puisqu'il dépend d'une des lois les plus ordinaires, tandis que l'autre sup-



pose une loi intermédiaire. C'est de cette sorte de résultat inattendu, ou de *paradoxe* qu'offre la variété dont il s'agit, que dérive le nom de *paradoxale* que je lui ai donné. Cette variété a été trouvée par M. Tonnellier, dans une carrière de craie située à l'extrémité des faubourgs de Saint-Julien-du-Sault, département de l'Yonne.

129. Une autre variété que j'ai nommée *chaux carbonatée numérique*, et dont on voit la projection figure 81. a pour signe $\overset{\frac{5}{6}}{E}\,\overset{\frac{5}{6}}{B^2}D^3$ (1). En appliquant ici les formules qui ont été données précédemment, et en faisant attention que l'exposant $\frac{5}{6}$ de E, plus petit que $\frac{5}{2}$ qui convient au cas de la double pyramide droite (p. 462) indique que le dodécaèdre tourne ses arètes les plus saillantes vers les faces du générateur, on trouvera que le rapport $g' : p'$ des demi-diagonales du noyau hypothétique est celui de $\sqrt{12}$ à $\sqrt{5}$, d'où il suit que ce noyau est semblable au rhomboïde équiaxe. On trouvera de plus $N = \frac{5}{3}$; et quand à la valeur de n' ou de $\frac{x+y-nxy}{2y}$, elle devient $\frac{0}{6}$, quantité infiniment petite qui fait

(1) Le nom de *numérique* est tiré des propriétés de nombres que présente ce signe, dans lequel la somme 2 plus 3 des exposans de B et de D est égale au numérateur 5 de l'exposant de E, et leur produit est égal au dénominateur 6 du même exposant. J'ai déjà fait connaître cette variété sous un autre rapport, p. 344.

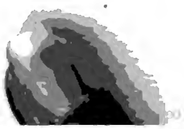
connaître que les faces du noyau hypothétique sont parallèles aux arêtes *ag*, *ds* (fig. 74) du générateur. C'est effectivement ce qui a lieu dans l'équiaxe. On aura enfin pour l'incidence de γ sur γ', 115^d 1′ 44″, et pour celle de γ sur γ'', 142^d 24′ 6″. M. Mabru, minéralogiste très instruit, qui a découvert la variété dont il s'agit près de Clermont-Ferrand, département du Puy-de-Dôme, avait très bien remarqué qu'elle présentait l'aspect du rhomboïde équiaxe, dont les six bords inférieurs seraient remplacés par autant de biseaux.

130. La variété qui va maintenant nous occuper offre un résultat que j'avais donné comme purement hypothétique, dans la première édition de mon Traité (1), n'ayant vu jusqu'alors aucun cristal qui le réalisât. Il consistait dans la possibilité que la forme du dodécaèdre métastatique fût l'effet d'une loi intermédiaire de décroissement, que j'avais déterminée. Ce résultat s'est présenté depuis à mon observation dans des cristaux dont on voit la projection (fig. 82). Les faces ϑ, ϑ, qui appartiennent au dodécaèdre dont je viens de parler s'y combinent avec celles du rhomboïde inverse, savoir, *f*, *f*, et avec les pans *c*, *c′* du prisme hexaèdre régulier. Le signe est $\left({}^{\frac{5}{4}}\underset{\vartheta}{E}\ {}^{\frac{5}{4}}B^{1}D^{2}\right)\underset{f}{E^{1\,1}}\underset{c}{E}e.$

Le métastatique ordinaire tourne ses arêtes les

(1) Tome II, page 35.





moins saillantes vers les faces du générateur, tandis que ce sont au contraire les plus saillantes qui ont cette position dans le dodécaèdre produit par une loi intermédiaire. D'une autre part, le rhomboïde inverse ordinaire a ses faces tournées vers les bords supérieurs du noyau. Mais il y a une loi, savoir, celle dont l'expression est $\overset{5}{e}$, susceptible de donner le même rhomboïde, avec la condition que ses faces correspondent à celles du noyau. Il suit de là que l'aspect du cristal qui nous occupe peut également résulter de la combinaison des lois indiquées par le signe donné ci-dessus, ou de celles qui le sont par cet autre signe $\overset{2}{\underset{\vartheta}{D}}\overset{5}{\underset{f}{e}}\overset{2}{\underset{c}{e}}$. La division mécanique fait disparaître l'ambiguïté, en prouvant que c'est le premier cas qui a lieu. De là le nom de *chaux carbonatée ambiguë* que j'ai donné à la variété dont il s'agit.

Les formules de la page 460 fournissent un moyen simple pour trouver les exposans de la quantité qui, dans le signe, représente les faces ϑ, ϑ, d'après la condition que le cristal secondaire soit semblable au dodécaèdre métastatique : car alors on a $N=2$; donc la proportion $x:y::N+2:2N-2$, devient $x:y::2:1$. Faisant $x=2$ et $y=1$, dans l'équation $n=\frac{2x+y}{2xy}$, on trouve $n=\frac{5}{4}$, comme dans le signe.

131. J'ai fait connaître (p. 355) une variété de corindon que je nomme *ternaire*, et dont la forme, qui est celle d'un dodécaèdre composé de deux pyra-

mides droites, résulte du décroissement $E^{33}E$. Le corindon nous offre d'autres dodécaèdres du même genre, produits par des lois intermédiaires sur les angles E. L'un d'eux, dont on voit la projection figure 83, et que j'appelle *corindon assorti*, a pour signe $(\overset{}{\underset{h}{E^{2}E}}D^{2}B^{1})$. Dans le cas présent on a $x=2$, $y=1$, si dans la formule $n=\frac{x+2y}{xy}$ relative au décroissement qui produit la double pyramide droite hexaèdre (p. 454), on met à la place de x et de y leurs valeurs numériques, on trouve $n=2$, comme l'indique le signe. Substituant les mêmes valeurs et celle de n dans le rapport de dr à pr (fig. 74), qui est celui de $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$ à $\frac{2nxy+x-y}{3(nxy-x+y)}.a$, on trouve

$$dr:pr::\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:a,$$

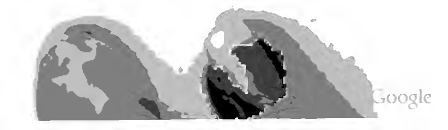
ce qui fournit un moyen simple pour déterminer les incidences respectives des faces du dodécaèdre.

Soit $syrz$ (fig. 84) la pyramide supérieure, c étant le centre de la base, et sc la hauteur. Menons le rayon cr, ensuite co perpendiculaire sur tr, puis os. Nous aurons

$cr:cs::dp:pr$ (fig. 74) $::\sqrt{\frac{4}{3}g^2}:a$; donc $co:cs::g:a$.

Or, dans le corindon, $g=\sqrt{15}$, $p=\sqrt{17}$; donc $a=\sqrt{108}$; donc $co:cs::\sqrt{15}:\sqrt{108}::\sqrt{5}:6$.

D'après ces données, on trouve pour l'incidence



de *h* sur *h* (fig. 83) 124^d 6′, et pour celle de *h* sur *h′* 139^d 6′ (1).

132. Une seconde variété, qui est représentée figure 85, réunit les faces *r*, *r* de l'uniternaire avec celles d'un dodécaèdre produit par une loi intermédiaire différente de la précédente, en sorte que le signe du cristal est $\underset{l}{(E^{\frac{7}{5}}\,{}^{\frac{7}{5}}ED^{5}B^{1})}\underset{r}{E^{33}E}$. Si nous supposons que *syrtz* (fig. 84) soit encore une des pyramides qui résulte du décroissement intermédiaire, et si dans le rapport $\sqrt{\frac{4}{3}g^2} : \frac{2nxy+x-y}{(3nxy-x-y)} . a$ ou $dp : pr$ nous faisons $x=5$, $y=1$, $n=\frac{7}{5}$, nous aurons $dp : pr :: \sqrt{\frac{4}{3}g^2} : 2a :: cr : cs$; donc $co : cs :: g : 2a$, rapport double de celui qui donne la variété décrite précédemment. En faisant usage de ces données, on trouve 121^d 6′ pour l'incidence de *l* sur *l*, et 158^d 52′ pour celle de *l* sur *l′*. Quant à celle de *r* sur *l*, on la trouvera de 161^d 21′, d'après les mesures indiquées (p. 355), pour la variété ternaire.

On voit ici que la loi intermédiaire qui donne les faces *l*, *l*, et qui pourrait paraître peu admissible par

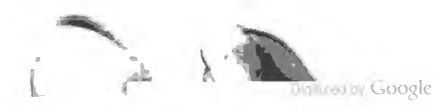
---

(1) Le nom de *corindon assorti* que j'ai donné à cette variété est tiré de ce qu'elle offre l'accord ou l'assortiment d'une loi de décroissement qui est une des plus simples de ce genre, avec un rapport également simple entre les dimensions de la pyramide, prises dans le sens horizontal et dans le sens vertical.

sa complication, dépend d'un rapport très simple, pris dans les dimensions du noyau, savoir, $g:2a$. Il arrive assez souvent que ces lois qui, considérées en elles-mêmes, sembleraient propres à faire naître des préjugés contre la théorie, ont un côté qui les ramène à l'analogie des résultats ordinaires qui, en général, sont remarquables par leur simplicité.

133. Il arrive souvent que la combinaison des faces qui résultent d'un décroissement intermédiaire, avec d'autres faces produites par des décroissemens ordinaires, imprime à la forme qui en dérive des caractères de symétrie dont on peut tirer avantage pour simplifier et pour abréger les calculs. C'est ce qui a lieu en particulier dans la variété paradoxale (fig. 80), et je vais faire voir comment son aspect géométrique suffit seul pour fournir des données à l'aide desquelles on arrive, sans aucun tâtonnement, à la détermination du décroissement intermédiaire qu'elle présente.

Supposons que l'on ait reconnu que les faces f, f appartiennent au rhomboïde inverse, et les faces r, r au dodécaèdre métastatique. En observant attentivement ces deux ordres de faces, on s'apercevra d'abord que les arêtes inférieures des premières sont si sensiblement parallèles aux arêtes h, h du dodécaèdre dû au décroissement intermédiaire, que l'on est fondé à en conclure que le parallélisme est rigoureux. Il en résulte que le rhomboïde inverse est le noyau hypothétique du dodécaèdre dont il s'agit.



De plus, on s'apercevra du même parallélisme entre les longs bords des faces *r*, *r*, d'où il suit que les arêtes qu'elles remplacent sur le dodécaèdre sont inclinées à l'axe de la même quantité que celles qui, sur le métastatique, séparent les faces *r*, *r*, et qui sont les moins saillantes parmi les six contiguës à un même sommet.

Cela posé, il est d'abord facile de trouver la valeur de N. Car *adsg* (fig. 86) étant toujours la section principale du véritable noyau, soient *dk*, *dl*, les arêtes du métastatique qui ont l'angle *d* pour point commun. Désignant l'angle *as* par 3, nous aurons

$$dr = 2,\ ar = 2,\ ak = 3;\ \text{donc}\ dr : rk :: 2 : 5,$$

lequel rapport est aussi celui de *qe* à *ex* (fig. 74). Soit $qe = 2$; dans la coupe principale $q\gamma\nu\varepsilon$ du noyau hypothétique, nous aurons $e\gamma = qe = 2$; donc $\gamma x = 3$. Mais $\gamma\varepsilon = 6$; donc l'équation $\gamma x = \frac{a'}{N-1}$ devient

$$3 = \frac{6}{N-1},\ \text{d'où l'on tire}\ N = 3.$$

133. On peut, au moyen des formules ordinaires relatives aux décroissemens sur les arêtes D, vérifier tout de suite la justesse des données prises dans l'aspect géométrique du dodécaèdre dont il s'agit ici. Mais il restera à connaître la loi intermédiaire dont il dérive; et pour y parvenir il suffira de chercher le rapport entre *x* et *y*, parce que ce rapport étant donné on aura la valeur de *n*, à l'aide de la for-

mule $n = \frac{Ny + x + y}{Nxy}$. Pour dispenser ceux qui voudraient faire cette recherche de recommencer chaque fois le calcul compliqué qu'entraîneraient ici les méthodes particulières, je vais généraliser le problème, pour arriver à une formule qui soit applicable à tous les cas.

Soient *asb*, *gsb* (fig. 87) les mêmes faces que NXQ, CXQ (fig. 73), limitées par le plan horizontal *abg* (fig. 87), et par le plan vertical *asg*. Je mène *ag*, ensuite *bc* perpendiculaire sur *ag*, puis *sc*, qui sera aussi perpendiculaire sur la même ligne. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que le point *b* coïncide avec le point Q (fig. 73), ou avec le point *q* (fig. 74). Je prolonge *bc* (fig. 87), jusqu'à ce qu'elle soit égale à *qe* (fig. 74), puis je mène *af* (fig. 87); ensuite je fais passer par le point *b* un plan *obz*, parallèle à la face *audb* (fig. 73) du générateur. Enfin je mène *oz*, et par le point où elle coupe *cs*, je mène *br*.

Cherchons d'abord le rapport entre *bf* et *af*. Si nous prolongeons *qe* (fig. 74) jusqu'à la rencontre de l'arète *vx*, le prolongement *el* étant la distance entre le point *e* de l'axe et l'arète *vx*, qui est une des moins saillantes, il est évident que dans la supposition présente on a *bf* (fig. 87) = *qe* (fig. 74). On aura, d'une autre part, *af* (fig. 87) = *el* (fig. 74), puisque *bs* fait partie d'une des arètes les plus saillantes du dodécaèdre, et que *as* est prise sur une des moins sail-



lantes. Or, qe (fig. 74) ou son égale

$$vy':el::y'x:ex::\tfrac{2}{3}a'+\frac{1}{N-1}a':\tfrac{1}{3}a'+\frac{1}{N-1}a'::2N-1.N+2.$$

Donc aussi,

$$bf\,(\text{fig. } 87):af::2N+1:N+2.$$

134. Maintenant nous avons à déterminer le rapport entre br et or, dont l'une est dans le sens de la diagonale oblique du noyau, et l'autre est parallèle à la diagonale horizontale. Cherchons d'abord br. Soit $bf=2N+1$; on aura $af=N+2$, et à cause de l'angle $acf=60^d$,

$$cf=\tfrac{1}{2}af=\frac{N+2}{2},\ bc=bf-cf=2N+1-\frac{(N+2)}{2}=\frac{3N}{2},$$

$$bc:cs::qe(\text{fig. } 74):ex::\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}:\tfrac{1}{3}a'+\frac{1}{N-1}a'$$

$$::\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}:\frac{N+2}{3N-3}a'.$$

Mettant à la place de bc sa valeur $\frac{3N}{2}$, on trouvera

$$cs=\frac{N^2+2N}{4N-4}\cdot\frac{a'}{g'}\sqrt{3}.$$

D'une autre part

$$bc:cr::\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}:\tfrac{1}{3}a::g:a\sqrt{\tfrac{1}{3}};\ \text{ou}\ \frac{3N}{2}:cr::g:a\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Donc $$cr=\frac{3N}{2}\cdot\frac{a}{g}\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

$$br=\sqrt{\overline{(bc)}^2+\overline{(cr)}^2}=\sqrt{\frac{9N^2}{4}+\frac{9N^2}{4}\cdot\frac{a^2}{3g^2}}=\sqrt{\frac{9N^2}{4}\left(\frac{3g^2+a^2}{3g^2}\right)};$$

et mettant à la place de a^2 sa valeur $9p^2 - 3g^2$,

$$br = \sqrt{\frac{9N^2}{4} \cdot \frac{3p^2}{g^2}}.$$

Reste à chercher or, au moyen de la proportion

$$or : rs :: ac : cs.$$

1°. Pour rs; nous aurons

$$rs = cs - cr = \frac{N^2 + 2N}{4N - 4} \cdot \frac{a'}{g'} \sqrt{3} - \frac{3N}{2} \cdot \frac{a}{g} \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

2°. Pour ac; nous aurons

$$ac = cf \sqrt{3} = \frac{N+2}{2} \sqrt{3}.$$

3°. Nous avons déjà eu

$$cs = \frac{N^2 + 2N}{4N - 4} \cdot \frac{a'}{g'} \sqrt{3}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans la proportion précédente, elle devient

$$or : \frac{N^2+2N}{4N-4} \cdot \frac{a'}{g'} \sqrt{3} - \frac{3N}{2} \cdot \frac{a}{g} \sqrt{\tfrac{1}{3}} :: \frac{N+2}{2} \sqrt{3} : \frac{N^2+2N}{4N-4} \cdot \frac{a'}{g'} \sqrt{3},$$

ou

$$or : \left[(N+2)\frac{a'}{g'} - (2N-2)\frac{a}{g}\right]\sqrt{3} :: 1 : \frac{2a'}{g'};$$

d'où l'on tire

$$or = \left[(N+2)\frac{a'}{g'} - (2N-2)\frac{a}{g}\right]\frac{g'}{2a'} \sqrt{3}.$$

Supprimant dans les expressions de *br* et de *or* le facteur commun $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, on aura

$$br : or :: \frac{3Np}{g} : \left[(N+2)\frac{a'}{g'} - (2N-2)\frac{a}{g}\right]\frac{g'}{a'}$$
$$:: \frac{3Np}{g} : N+2-(2N-2)\frac{ag'}{a'g}.$$

Supposons $g'=g$, et soit m le nombre qui, dans cette hypothèse, exprime le rapport entre a' et a, en sorte que l'on ait $a'=ma$. La proportion précédente deviendra

$$br:or::\frac{3Np}{g}:N+2-(2N-2)\frac{1}{m}::3Np:(N+2)g-2(N-2)\frac{g}{m}$$
$$:: 3Nmp : (N+2)gm-(2N-2)g,$$

et faisant les multiplications indiquées, puis réduisant,

$$br : or :: 3Nmp(Nm+2m-2N+2)g.$$

Il reste maintenant à prouver que x est à y comme la somme des coëfficiens de p et de g est à leur différence.

Soit *obz* (fig. 88) le même triangle que figure 87, et *biku* (fig. 88) le rhombe dont ce triangle fait partie. Soit *hl* le bord situé vers l'angle *i* de la première lame de superposition, lequel sera parallèle à *bo*. x et y seront en même temps les nombres d'arêtes de molécule contenues dans *hi* et *il*. Soient X et Y ceux que renferment *bi* et *io*. Soit de plus s le nombre de fois que la demi-diagonale oblique p'' de

la molécule est contenue dans br ou $bn+nr$, et t le nombre de fois que la demi-diagonale horizontale g'' est contenue dans or. Il est évident que le premier nombre s est égal à celui d'arêtes de molécule renfermé dans $bi+io$, et que le second nombre t est égal à celui d'arêtes renfermé dans $ok=ik-io=bi-io$; donc $s=X+Y$ et $t=X-Y$; et parce que les nombres d'arêtes de molécules contenues dans hi et il sont proportionnels à ceux que renferment bi et io, $s:t::x+y:x-y$. Or, $br=sp''$, et $or=tg''$; donc $sp'':tg''::3Nmp:(Nm+2m-2N+2)g$; et parce que les dimensions de la molécule sont proportionnelles à celles du noyau, $s:t$, ou bien

$$x+y:x-y::3Nm:Nm+2m-2N+2.$$

Si dans la proportion $x+y:x-y::s:t$ on ajoute le second terme de chaque rapport au premier, on aura

$$2x:x-y::s+t:t;\text{ ou, } 2x:2x-2y::s+t:2t.$$

Si dans cette nouvelle proportion on retranche le second terme de chaque rapport du premier, elle devient

$$2x:2y::s+t:s-t,\text{ ou } \ldots t:s-t;$$

c'est-à-dire que x est à y con[illegible] e des ficiens de p et de g dans le ra[illegible] à or plus haut est à leur différer[illegible] coefficiens à la place de s et de [illegible]

$$x:y::[illegible] m-N+1:(1[illegible]$$

Maintenant, dans la variété paradoxale, $N=3$, $g=\sqrt{3}$, $a=3$, et si l'on fait $g'=g=\sqrt{3}$, on aura

$$p'=\sqrt{5},\ a'=\sqrt{9p'^2-3g'^2}=\sqrt{45-9}=6=2a;$$

d'où il suit que $m=2$. Substituant à la place de N et de m leurs valeurs, dans la proportion précédente, on trouve $x:y::2:1$. Donc on peut faire $x=2$, $y=1$. Reprenant la formule $n=\frac{Ny+x+y}{Nxy}$, et mettant à la place de N, x, y, leurs valeurs, on aura $n=\frac{6}{6}=1$.

135. Lorsqu'un des décroissemens qui ont lieu sur les angles E donne la double pyramide droite, le noyau hypothétique devient le prisme hexaèdre régulier. L'hypothèse la plus simple est celle dans laquelle le rapport entre la perpendiculaire menée du centre de la base du prisme sur un des côtés, et la hauteur du même prisme est égal à celui qui a lieu entre la demi-perpendiculaire $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$ sur l'axe du rhomboïde et la longueur de cet axe (1). Dans ce cas, le décroissement ordinaire relatif au prisme hexaèdre étant donné, il est bien facile d'avoir la loi du décroissement intermédiaire qui lui correspond dans le rhomboïde. Je supposerai toujours que x soit dans le sens de D, et y dans le sens de B.

---

(1) Le prisme alors est censé résulter d'un décroissement [...]ne rangée sur les bords D du rhomboïde.

Soient *asg*, *hsg* (fig. 89), deux faces contiguës sur la pyramide, limitées par le plan vertical *ash*, et par le plan horizontal *agh*, et soit *mgl* un plan qui coïncide avec la face du noyau qui regarde l'arête *gs*. Je mène *ah*, ensuite *so* perpendiculaire sur *ah*, puis *ok* perpendiculaire sur *gh*, et enfin *sk* et *gn*.

Le triangle *kos* pourra être regardé comme mensurateur, relativement au décroissement qui en agissant sur le bord de la base du prisme alligné comme *gh*, donne la face *gsh*.

Soit $go = \sqrt{\frac{1}{3}g^2}$. Nous aurons

$on = \frac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$, $gn = p$, $ao : go$ ou $\sqrt{\frac{1}{3}g^2} :: \sqrt{3} : 1$, $ao = g$. Soit z l'exposant du décroissement relatif à la face *gsh*, considéré dans le sens de la largeur. $go = \sqrt{\frac{1}{3}g^2}$. ok sera $= \frac{1}{2}g$. Mais dans l'hypothèse où ok égalerait g et go serait $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$, la hauteur du prisme aurait pour expression $\sqrt{9p^2 - 3g^2}$. Donc, si nous supposons comme ici $ok = \frac{1}{2g}$, la hauteur sera exprimée par $\frac{1}{2}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$; donc $os = \frac{1}{2z}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$;

$$ns = os - on = \frac{1}{2z}\sqrt{9p^2 - 3g^2} - \frac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2},$$

$$= \left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{3}\right)\sqrt{9p^2 - 3g^2} = \frac{3-2z}{6z}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$ Or,

$$ns : mn :: os : ao, \quad \text{ou} \quad \frac{3-2z}{6z}\sqrt{9p^2 - 3g^2} : mn$$

$$:: \frac{1}{2z}\sqrt{9p^2 - 3g^2} : g.$$

d'où l'on tire

$$mn = \frac{3-2z}{3} \cdot g,$$

donc

$$gn : mn :: p : \frac{3-2z}{3} \cdot g :: 3p : (3-2z)g.$$

Or, d'après ce qui a été dit ailleurs, $x : y$ comme la somme des facteurs de p et de g est à leur différence,

$$:: 3+3-2z : 3-3+2z :: 6-2z : 2z :: 3-z : z.$$

Ayant le rapport entre x et y, on aura le nombre de rangées soustraites par la formule $n = \frac{x+2y}{xy}$.

136. Choisissons pour exemple le corindon, et supposons que la pyramide résulte du décroissement $\overset{1}{B}$. On aura $z=1$;

$$x : y :: 3-1 : 1 :: 2 : 1,\ n = \frac{2+2}{2} = 2.$$

Donc le signe du décroissement intermédiaire sera $(E^{2}{}^{2}ED^{2}B^{1})$. C'est le corindon assorti.

Supposons que le décroissement rapporté au prisme soit $\overset{\frac{1}{2}}{B}$. On aura

$$z = \tfrac{1}{2} \text{ et } x : y :: 3-z : z :: 3-\tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{2} :: 6 : 1,\quad n = \frac{5+2}{5} = \tfrac{7}{5}.$$

Donc le signe du décroissement intermédiaire sera $(E^{\frac{7}{5}}{}^{\frac{7}{5}}ED^{5}B^{1})$. Ce signe appartient à douze des faces du corindon di-dodécaèdre.

Supposons pour le prisme $\overset{\frac{3}{2}}{B}$. On aura

$$z = \tfrac{3}{2},\ x : y :: 3-\tfrac{3}{2} : \tfrac{3}{2} :: 6-3 : 3 :: 1 : 1;$$

c'est-à-dire que le décroissement devient ordinaire. Et comme $n=3$, il a lieu par 3 rangées, parce qu'ici 3 exprime le nombre de rangées soustraites, et non pas le nombre de diagonales soustraites.

Passé ce terme, le problème appartient à une autre hypothèse dans laquelle x est dans le sens de B et y dans le sens de D.

II. *Décroissemens intermédiaires sur les angles* E, x *étant dans le sens de* B, *et* y *dans le sens de* D.

137. Soit *abdu* (fig. 90) la même face du générateur que celle qui est représentée figure 72. Les lignes $\gamma\lambda$, $\pi\zeta$ (fig. 90), parallèles aux bords produits par le décroissement, seront nécessairement tournées en sens contraire de celui qui a lieu dans la figure 72; $b\lambda$ et πu (fig. 90), ou x, x, qui sont dans le sens de B, B, étant plus grandes que $b\gamma$, $u\zeta$ ou y, y, qui sont dans le sens D, D. Il en résulte que dans le dodécaèdre HX (fig. 91) à triangles scalènes qui est l'effet du décroissement, les arêtes XQ, XB, etc., qui correspondent aux faces du générateur, divergent avec ses diagonales obliques, en allant du sommet vers les parties inférieures, au lieu que c'est l'inverse dans le cas représenté (fig. 73). La figure 92 devant être alors substituée à la figure 74 on voit, en les comparant, que les arêtes si ... mme xv, hq (fig. 92), passeront encore ... d ... du générateur, et que les arête ... aussi à une certaine distance a...

obliques *ad*, *gs*. Mais la ligne *al* parallèle à *xq* part du sommet, et non plus de l'angle *d*, comme dans la figure 74, en sorte que *ap* et *ay* disparaissent, et que la dernière se trouve remplacée par le décroissement *dl* (fig. 92) de l'arête *sd*. Quant à la ligne *av*, elle sera la même que figure 74.

Soit *at* (fig. 92) le prolongement de *ga* jusqu'à la rencontre de *qx*, les trois lignes *dl*, *av* et *at* seront celles qui, dans le calcul relatif au cas présent, font l'office des lignes *ay*, *av* et *ap* (fig. 74), employées à la détermination du dodécaèdre précédent.

La différence entre les deux cas dépend des positions de *x* et de *y* qui sont inverses l'une de l'autre. La plupart des résultats portent l'empreinte de cette différence, en sorte que si l'on met *x* à la place de *y*, et réciproquement dans ceux qui se rapportent au premier cas, on a les formules relatives au second. Il faut en excepter la valeur de *ay* (fig. 74), qui se change en celle de λϑ (fig. 91), sans aucune substitution, ainsi que la valeur de g' ou de *qe* (fig. 74 et 92), qui n'offre la différence dont il s'agit que dans le dénominateur de la fraction représentative de cette valeur, ce qui n'empêche pas que le rapport de g' à p' ne participe, sans aucune restriction, à la différence dont j'ai parlé.

138. La marche du calcul étant presque la même dans les deux cas, je me bornerai à indiquer en général celle qui se rapporte au dodécaèdre que nous

considérons ici, et je ne la développerai que dans les parties où elle diffère de la précédente.

Dans le triangle mensurateur akf (fig. 92) qui répond à dkf (fig. 74), on aura toujours

$$kf = \sqrt{g'^2 + p'^2},$$

et si l'on applique littéralement à la figure 90 tout ce qui a été dit de la figure 72 (p. 441), on trouvera que

$$ak : kf (\text{fig. } 92) :: \frac{2pnxy}{x-y} : \sqrt{g^2+p^2},$$

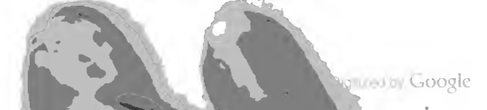
et parce que $ak : kf :: ad : dl$, on aura

$$dl = \frac{x-y}{nxy}\sqrt{9^2+p^2},$$

expression qui doit être la même que celle de a, ainsi qu'il est facile de le concevoir, avec un peu d'attention.

Pour avoir le prolongement av de da, on substituera la figure 93 à la figure 75. La seule différence entre les expressions des lignes tracées sur ces deux figures consiste en ce que bm qui était $nx\sqrt{g'^2+p}$ devient $ny\sqrt{g'^2+p'^2}$; et quant à by, elle sera toujours $\sqrt{g'^2+p'^2}$. D'après les substitutions indiquées, le même calcul donne $av = \frac{2py}{nxy+x}$, au lieu de $av = \frac{2px}{nxy+y}$, conformément à ce qui a été annoncé ci-dessus (p. 481).

L'expression de ax sera $\frac{y}{nxy+x-y} \cdot a$.



Pour trouver celle de at, on prendra les triangles semblables xta, als, qui donnent $ax : at :: as : ls$.

Or,

$$ls = ds + dl = \left(1 + \frac{x-y}{nxy}\right)\sqrt{g^2+p^2} = \frac{nxy+x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2};$$

donc

$$\frac{y}{nxy+x-y} \cdot a : at :: a : \frac{nxy+x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2};$$

d'où l'on déduit

$$at = \frac{1}{nx}\sqrt{g^2+p^2}.$$

139. Pour appliquer les données précédentes, il s'agit d'abord de chercher les expressions de g' et de p'. On aura comme ci-dessus $dr : hr :: qe : eh$. Mais à la place de la proportion $dr : pr :: qe : ex$, dont les deux premiers termes n'existent pas dans le cas présent, on prendra $lz : az :: qe : ex$. De plus

$$lz : ls :: dr : ds,$$

ou

$$lz : \frac{nxy+x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2} :: dr : \sqrt{g^2+p^2};$$

donc

$$lz = \frac{nxy+x-y}{nxy} \times dr;$$

donc la proportion $lz : az :: qe : ex$, peut être mise sous cette forme

$$\frac{nxy+x-y}{nxy} \times dr : az :: qe : ex, \text{ ou } dr : \frac{nxy}{nxy+x-y} \times az :: qe : ex.$$

Mais nous avons eu

$$dr : hr :: qe : eh;$$

donc

$$eh : ex :: hr : \frac{nxy}{nxy+x-y} \times az.$$

Maintenant

$$hr = ax + \tfrac{1}{3}a = \frac{ay}{nxy+x-y} + \tfrac{1}{3}a = a\left(\frac{nxy+x+2y}{3nxy+3x-3y}\right),$$

$$az = as - sz, sz : sr :: lz : dr; \text{ mais } lz = \frac{nxy+x-y}{nxy} \times dr;$$

donc

$$sz = \frac{nxy+x-y}{nxy} . sr;$$

donc

$$az = a - \left(\frac{nxy+x-y}{3nxy}\right)a = \frac{2nxy-x+y}{3nxy} . a;$$

donc la proportion $eh : ex :: hr : \frac{nxy}{nxy+x-y} \times az$

devient

$$eh : ex :: a\left(\frac{nxy+x+2y}{3nxy+3x-3y}\right) : \frac{nxy}{nxy+x-y} . a\left(\frac{2nxy-x+y}{3nxy}\right),$$

ou

$$eh : ex :: nxy + x + 2y : 2nxy - x + y.$$

Continuant l'opération comme ci-dessus, on trouve

$$g' = g . \frac{nxy+x+y}{nxy+y}; \ p' = \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x+y-nxy}{nxy+x-y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2};$$

donc

$$g' : p' :: g : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x+y-nxy}{nxy+x-y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2}.$$

140. Il n'y a rien à changer dans la marche du calcul qui donne l'expression de N. On trouvera

$$N=\frac{x+y}{nxy-x},\ \text{d'où l'on tire}\ n=\frac{Nx+x+y}{Nxy}.$$

A l'égard de n', on observera que le décroissement qui s'y rapporte agit ici comme dans le premier cas par renversement sur les angles inférieurs du générateur. On aura donc encore $g':g::2a':\frac{2n'+1}{1-n'}a$. Et en poursuivant comme ci-dessus (p. 449) on trouvera $n'=\frac{x+y-nxy}{2x}$.

Même manière d'opérer pour avoir la plus grande incidence des faces du dodécaèdre. Le rapport entre le sinus et le cosinus de sa moitié, ou entre $B\varpi=g'$ (fig. 91) et $\varpi\mu$ (fig. 91 et 92), sera celui de

$$\sqrt{(nxy+x+2y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy+x-y)^2 4g^2}\ \text{à}\ (nxy-x)\sqrt{a^2}.$$

Quant au rapport entre le sinus et le cosinus de la plus petite, ou entre g' et $\lambda\vartheta$, on y parviendra de la manière suivante. Les triangles semblables alz, $\varepsilon\zeta x$, donnent $al:lz::\varepsilon x:\varepsilon\zeta$. Or,

$$al=\sqrt{(az)^2+(lz)^2}$$
$$=\sqrt{a^2\left(\frac{2nxy-x+y}{3nxy}\right)+\left(\frac{nxy+x-y}{nxy}\right)^2\tfrac{4}{3}g^2},$$

$$\varepsilon x=a'+\gamma x=a\left(\frac{2x+y-nxy}{nxy+y}\cdot\frac{nxy+x+y}{nxy+x-y}\right)$$
$$+a\left(\frac{nxy+x+y}{nxy+x-y}\cdot\frac{nxy-x}{nxy+y}\right)=a.\frac{nxy+x+y}{nxy+x-y}\cdot\frac{x+y}{nxy+y}.$$

Substituant dans la proportion précédente les valeurs de al, lz et ϵx, et prenant la valeur de $\frac{1}{2}e\zeta = \lambda\vartheta$, on trouve

$$\frac{\frac{1}{2}\epsilon\zeta = a(nxy + x + y)\dfrac{x+y}{nxy+y}\sqrt{\frac{1}{3}g^2}}{\sqrt{\frac{1}{9}a^2(2nxy - x + y)^2 + (nxy + x - y)^2\frac{4}{3}g^2}}.$$

Mais on a toujours

$$g' = g \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy + y};$$

donc

$$g' : \lambda\vartheta :: \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2(2nxy - x + y)^2 + (nxy + x - y)^2 4g^2} : (x+y)\sqrt{a^2}.$$

Pour le cas où le dodécaèdre est composé de deux pyramides droites, réunies base à base, on trouvera, en égalant les valeurs de ex et eh, $n = \frac{2x+y}{xy}$.

Il y a aussi un terme où le noyau hypothétique devient semblable au générateur. Pour trouver dans ce cas la valeur de n, on fera

$$g^2 : p^2 :: g^2 : \tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x + y - nxy}{nxy + x - y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2.$$

Et opérant comme ci-dessus (p. 459), on trouvera

$$n = \frac{x + 2y}{2xy}.$$

141. Si l'on suppose ex plus grande que eh, auquel cas le dodécaèdre tourne ses arêtes les moins saillantes vers les faces du générateur, on aura toujours

$$g' = g \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy + y};$$

mais on trouvera

$$a' = a \cdot \left(\frac{nxy - 2x - y}{nxy + y} \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy + x - y}\right),$$

et

$$g' : p' :: g : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy - 2x - y}{nxy + x - y}\right)^2 + \tfrac{1}{38}g^2}.$$

La quantité N sera $\frac{nxy - x}{x + y}$, d'où l'on déduira

$$n = \frac{Nx + Ny + x}{xy}.$$

Pour avoir n', on fera attention que dans le cas présent, γq (fig. 92) représente la diagonale oblique du noyau hypothétique; on aura donc

$$qe : e\gamma :: \sqrt{\tfrac{4}{38}g'^2} : \sqrt{a'^2};$$

et parce que le décroissement qui donne le noyau hypothétique agit sur l'angle A du générateur,

$$qe : e\gamma :: (n' + 1)\sqrt{\tfrac{4}{38}g^2} : \frac{2n' - 1}{3}\sqrt{a^2} \text{ (p. 311)};$$

donc

$$g' : 2\sqrt{a'^2} :: (n' + 1)g : (2n' - 1)\sqrt{a^2}.$$

Et substituant à la place des rapports entre g' et g, et entre a' et a ceux de leurs valeurs algébriques, comme on l'a fait (p. 457), on trouvera

$$n' = \frac{nxy - x - y}{2x}.$$

A l'égard des rapports entre les sinus et les cosinus

des angles qui mesurent les moitiés des incidences des faces du dodécaèdre, il n'y aura aucun changement à y faire, par une raison semblable à celle que nous avons exposée ci-dessus (p. 458).

142. Je n'ai encore rencontré qu'un seul exemple d'une loi analogue à celle dont il s'agit ici. Le cristal qui la présente appartient à l'argent antimonié sulfuré. On voit (fig. 94) la projection de ce cristal, dont le signe rapporté au noyau (fig. 95) est..... $\underset{n}{\overset{1}{D}}\underset{x}{({}^{1}E^{1}B^{3}D^{2})}\underset{t}{\overset{6}{A}}\underset{s}{\overset{2}{A}}$. Si l'on fait $g=\sqrt{5}$, $p=\sqrt{3}$, $x=3$, $y=2$, $n=1$, on trouve pour l'incidence de x sur x 131^d 16′, et pour celle de x sur x' 158^d 12′.

Dans le noyau hypothétique on a

$$g' : p' :: 7\sqrt{5} : \sqrt{87}.$$

De plus $N=\frac{5}{3}$, et $n'=-\frac{1}{6}$, ce qui indique que la diagonale oblique $\gamma\nu$ du même noyau faisant un angle plus ouvert avec l'axe que l'arête ag, le décroissement désigné par n' agit par renversement sur l'angle A du générateur (p. 455). La véritable formule rapportée à cet angle sera donc $n'=\frac{1}{6}$.

Les facettes s, s (fig. 94) sont inclinées l'une sur l'autre de 158^d 12′. A l'égard des facettes t, leurs plus longs bords étant parallèles entre eux, on voit que les diagonales obliques du rhomboïde qu'elles formeraient par leur réunion sont inclinées à l'axe de la même quantité que les arêtes qx qu'elles remplacent. Désignant donc par g'' la demi-diagonale



horizontale du rhomboïde dont il s'agit, et par a'' son axe, on aura $qe : ex$ ou

$$lz : az :: g'' : \sqrt{3p''^2 - g''^2} :: (nxy + x - y)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$
$$: \frac{2nxy - x + y}{3}\sqrt{a^2} \text{ (p. 483)} :: 8\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{10}{3}\sqrt{a^2}.$$

Mais d'une autre part

$$g'' : \sqrt{3p''^2 - g'^2} :: mu : au :: (3n+3)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$
$$: (2n-1)\sqrt{a^2} \text{(p. 311)};$$

donc

$$8 : \tfrac{10}{3} :: 2n+3 : 2n-1;$$

d'où l'on tire $n=3$, ce qui indique un décroissement par six rangées sur l'angle A du générateur. L'incidence des mêmes facettes *t* sur les faces voisines *x*, *x*, sera de 155^d38'.

III. *Décroissemens intermédiaires sur les angles* e.

143. Nous avons fait voir, dans l'article précédent, qu'il existe entre les deux espèces de décroissemens qui ont lieu sur les angles E une relation qui permet de suivre à peu près la même marche pour les calculs qui concernent les uns et les autres. Cette relation s'étend aux décroissemens qui ont lieu sur les angles inférieurs, abstraction faite de quelques différences qui dépendent de celle que présentent les positions des quantités *x* et *y* situées toutes les deux sur les bords D, D, au lieu que dans les décroissemens sur E, l'une coïncide avec B et l'autre avec D. Nous

prendrons pour terme de comparaison avec l'espèce de décroissement dont il s'agit ici, celle qui se rapporte à E, de manière que x est dans le sens de D et y dans le sens de B.

Supposons d'abord que le générateur *as* (fig. 75) prenne une position renversée, comme on le voit (fig. 96). Les droites *ue*, *my* deviendront alors les lignes de départ du décroissement. Soit XH (fig. 97) le dodécaèdre produit en vertu de ce décroissement, et soient *uet*, *myt* (fig. 96) deux plans parallèles aux faces QXN, QXC (fig. 97). On voit d'abord que les angles inférieurs *d*, *n'*, etc. du générateur (1) étant situés à la naissance du décroissement, ces angles coïncideront toujours avec des points pris sur les arêtes les moins saillantes QX, BX, qui sont tournées vers les faces du générateur, tandis que les arêtes les plus saillantes NX, CX se formeront constamment à une certaine distance au-dessus des bords *au*, *ab*, etc., du générateur. Ainsi les unes et les autres conserveront les mêmes positions relatives à l'égard du noyau, au lieu que dans les deux décroissemens précédens, les arêtes les moins saillantes, par exemple, pouvaient être tournées tantôt vers les faces du généra-

(1) On a rétabli ici la position du générateur, conformément à celle qu'il a dans la figure 73, le renversement qui a lieu (figure 96) n'étant destiné qu'à faciliter un calcul commun aux deux espèces de décroissement, ainsi qu'on le verra bientôt.

teur, et tantôt vers ses bords supérieurs, suivant que le nombre des rangées soustraites était plus grand ou plus petit. Par une suite nécessaire, les résultats relatifs aux décroissemens sur *e* se trouvent resserrés entre des limites plus étroites que ceux qui dépendent des deux premiers décroissemens, ainsi que je l'exposerai plus bas.

Soit maintenant *hx* (fig. 98) un système de lignes qui aient avec le dodécaèdre (fig. 97) les mêmes relations que celles qui composent la figure 74, avec le dodécaèdre que représente la figure 73. En comparant les deux systèmes, on voit que *gp* (fig 98) parallèle à *vx* remplace *dp* (fig. 74) parallèle à *qx*, et que *dp* (fig. 74) qui en partant de l'angle *d* se dirige parallèlement à *qx*, est remplacée par *dx* (fig. 98), qui en partant du même angle est l'analogue de *qx* (fig. 74). Par une suite nécessaire, *ay* qui était limitée par *dp* (fig. 74), s'étend jusqu'à ce qu'elle rencontre *qx* (fig. 98). De plus, *eh* qui était tantôt plus grande et tantôt plus petite que *ex*, dans les résultats relatifs au dodécaèdre (fig. 73), sera constamment plus petite, comme on le voit (fig. 98), dans ceux qui se rapportent au dodécaèdre (fig. 97).

144. La différence générale entre les formules de part et d'autre consiste en ce que la quantité *y*, toutes les fois qu'elle n'est point multipliée par *n*, prend dans les calculs qui vont nous occuper un signe contraire à celui dont elle était affectée dans ceux qui ont pour objet le dodécaèdre (fig. 73). Du reste, les

valeurs de ay et de ar sont les mêmes, et celles de ap et de ax présentent l'inverse l'une de l'autre, conformément à ce qui a été dit plus haut.

Quant aux valeurs de N, n et n', et aux rapports entre g' et p', ainsi qu'entre les sinus et les cosinus des angles sous-doubles de ceux qui mesurent les incidences respectives des faces du dodécaèdre, ils ont la même conformité avec ceux qu'offrent les quantités analogues, pour les décroissemens sur E, dans les cas où l'on a ex plus grande que eh, ainsi que cela doit être d'après l'observation ci-dessus. La seule quantité qui ne participe point de la différence des signes qui précèdent y, est celle qui donne la valeur absolue de g'.

La marche des calculs qui concernent ce décroissement se trouve comme tracée d'avance par tout ce que nous venons de dire, et sera facile à suivre, en prenant pour objet de comparaison celle qui conduit aux résultats des décroissemens sur E, dans lesquels x coïncide avec D et y avec B.

145. Cherchons d'abord l'expression de ay, que nous tirerons de la fig. 96 comparée avec la fig. 75, qui avait donné au contraire l'expression de ar (fig. 74). Nous avons eu (p. 443),

$$bm = nx\sqrt{g'^2+p'^2} \text{ (fig. 75)}, \quad bt = ny\sqrt{g'^2+p'^2}$$

et

$$by = \sqrt{g'^2+p'^2}.$$

Dans le cas présent, bm (fig. 96) sera toujours égale



à $nx\sqrt{g'^2+p'^2}$; mais

$$bt=\sqrt{g'^2+p'^2} \text{ et } by=ny\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

Substituant ces valeurs dans la proportion

$$bm:yz=by::bc:cz, \text{ ou } bm:by::bc:bz-bc,$$

et observant que $bz=2p'ny$, puisqu'il renferme autant de diagonales $2p'$ que by renferme de fois $\sqrt{g'^2+p'^2}$, nous aurons

$$nx\sqrt{g'^2+p'^2}:ny\sqrt{g'^2+p'^2}::bc:2p'ny-bc,$$

ce qui donne $bc=\frac{2p'nxy}{x+y}$.

Mais $bt:bc::ay$ (fig. 98) $:ad$, ou

$$\sqrt{g'^2+p'^2}:\frac{2p'nxy}{x+y}::ay:2p, \text{ ou } \sqrt{g^2+p^2}:\frac{2pnxy}{x+y}::ay:2p;$$

donc $ay=\frac{x+y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2}$, quantité qui étant comparée à celle que nous avions obtenue (p. 442), offre, relativement au signe de y, la différence que nous avons annoncée (p. 491).

146. Passons à l'expression de av. Soit fh (fig. 96) la ligne qui correspond à mt vers l'angle u opposé à b. Le plan mty étant parallèle à la face QXC (fig. 97) du dodécaèdre, si nous faisons passer par fh (fig. 96) un second plan parallèle à BXC (fig. 97), et si nous supposons que les deux plans se prolongent en allant de mt vers fh (fig. 96), leur réunion se fera sur une ligne parallèle à l'arète CX (fig. 97). Il suit de là que nous pouvons considérer la formation de cette arète,

ou plutôt de celle qui répond à *gp* (fig. 98), parallèlement à CX (fig. 97), comme étant l'effet d'un décroissement hypothétique qui agirait sur les angles *b*, *u* (fig. 96) de la face *dbau*, parallèlement aux lignes *mt*, *fh*, en suivant une certaine loi que nous déterminerons dans un instant.

Soient $n\tau$, *rl*, deux lignes parallèles, l'une à *mt*, l'autre à *fh*, et tellement prises que *dn* égale la quantité dont le bord de chaque lame de superposition est dépassé par celui de la précédente, dans le sens de la diagonale *da*; soit de plus *di* une portion de l'arête *ds* égale à la dimension en hauteur.

Maintenant *duab* (fig. 99) étant le même rhombe que figure 96, soit $\lambda\gamma$ la ligne de départ du décroissement située vers l'angle *b*, en supposant une seule rangée soustraite. Appliquons ici la construction représentée (fig. 72), en menant $\lambda\mu$ parallèle à *da*, $\gamma\pi$ perpendiculaire sur $\lambda\mu$, $d\varepsilon$ parallèle à $\gamma\lambda$, puis $\nu\vartheta$, autre parallèle à la même ligne, et située de manière que l'on ait $\varepsilon\vartheta = b\gamma$. Dans ce cas $d\nu$ sera la distance d'une lame à l'autre prise sur *da*. On aura donc

$$d\nu \times n = dn \text{ (fig. 96)}.$$

Maintenant $b\lambda$ étant la ligne qui répond à *bm* (fig. 96), dont l'expression est $nx\sqrt{g'^2 + p'^2}$, et la figure 99 étant construite dans l'hypothèse d'une seule rangée soustraite, on aura $b\lambda = x\sqrt{g'^2 + p'^2}$. Par la même raison, $b\gamma$ étant l'analogue de *bt* (fig. 96), dont

l'expression est $\sqrt{g'^2+p'^2}$, on aura, en divisant celle-ci par n, $b\gamma=\frac{1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2}$ (fig. 99). D'ailleurs $b\mu$ égale à $b\lambda$ a aussi pour expression $x\sqrt{g'^2+p'^2}$. Donc

$$\gamma\mu \text{ ou } b\mu-b\gamma=\left(x-\frac{1}{n}\right)\sqrt{g'^2+p'^2}=\frac{nx-1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

De plus

$$\lambda\mu=2p'x,\ \omega\gamma=b\gamma=\frac{1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

Or,

$$\gamma\mu : \lambda\mu :: \omega\nu : d\nu;$$

donc

$$\frac{nx-1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2} : 2p'x :: \frac{1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2} : d\nu=\frac{2p'x}{nx-1};$$

donc $$dn \text{ (fig. 96)}=\frac{2p'nx}{nx-1}.$$

Mais di, qui représente la dimension en hauteur, est égale à by ou à $ny\sqrt{g'^2+p'^2}$. De plus, le triangle ndi est semblable au triangle νag (fig. 98). Donc

$$di:dn \text{ (fig. 96)} :: ag:a\nu \text{ (fig. 98)} :: \frac{2p'nx}{nx-1}:ny\sqrt{g'^2+p'^2},$$

ou

$$:: \frac{2pnx}{nx-1}:ny\sqrt{g^2+p^2} :: \frac{2px}{nxy-y}:\sqrt{g^2+p^2};$$

donc puisque $ag=\sqrt{g^2+p^2}$, on aura

$$a\nu=\frac{2px}{nxy-y},\text{ au lieu de }\frac{2px}{nxy+y}\text{ (p. 444).}$$

147. Il est facile maintenant de déterminer les expressions de ax et de ap.

1°. Pour ax. On a $ax : ay :: ax + as : ds$. Substituant à la place de ay sa valeur, et faisant $as = a$ et $ds = \sqrt{g^2 + p^2}$, puis dégageant ax, on trouve

$$ax = \frac{x + y}{nxy - x - y} . a.$$

C'est l'expression de ap (p. 445), dans laquelle les signes de y sont changés.

2°. Pour ap. Nous avons $ap : av :: ap + as : gs$. Faisant de même les substitutions convenables, on trouve $ap = \frac{x}{nxy - y - x}$. C'est l'expression de ax (p. 445), avec un changement de signe relativement à la quantité y.

148. Pour avoir les expressions des demi-diagonales g' et p' du noyau hypothétique, on se servira des deux proportions $gu : uh :: qe : ex$, et $gu : pu :: qe : eh$, d'où l'on tire $ex : eh :: uh : pu$. Or

$$uh = ax + \tfrac{2}{3}a = a . \frac{2nxy + x + y}{3nxy - 3x - 3y},$$

$$pu = ap + \tfrac{1}{3}a = a . \frac{nxy - 2x - y}{3nxy - 3y - 3x}.$$

Ces deux valeurs étant substituées à la place de uh et de pu, on trouve

$$ex : eh :: 2nxy + x + y : nxy + 3x.$$

En suivant la même marche que dans le calcul relatif

au décroissement sur E (p. 446), on aura

$$eh = a\,\frac{nxy+x+y}{nxy-x-y}\cdot\frac{2nxy+x+y}{3nxy+3x}.$$

Substituant cette valeur ainsi que celle de uh dans la proportion

$$gu = \sqrt{\tfrac{4}{38}g^2} : uh :: ge = \sqrt{\tfrac{4}{38}g'^2} : eh,$$

et dégageant g', on trouvera comme page 447,

$$g' = g\,.\,\frac{nxy+x+y}{nxy+x}.$$

Maintenant,

$$eh + ex : eh - ex :: 3nxy + 3x : nxy - x + 2y.$$

D'une autre part,

$$eh + ex = hx = as + 2(ax) = a\,.\,\frac{nxy+x+y}{nxy-x-y},$$

et $$(eh - ex) = \tfrac{1}{3}a.$$

Ces deux rapports combinés donnent

$$a' = a\,.\,\frac{nxy+x+y}{nxy-x-y}\cdot\frac{nxy-x+2y}{nxy+x}.$$

Egalant cette dernière quantité à $9p'^2 - 3g'^2$, et mettant à la place de g' sa valeur, puis dégageant p', on aura

$$p' = \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left[\left(\frac{nxy-x+2y}{nxy-x+y}\right)^2 + \tfrac{1}{38}g^2\right]\left(\frac{nxy+x+y}{nxy+x}\right)^2};$$

donc

$$g' : p' :: g : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy-x+2y}{nxy-x-y}\right)^2 + \tfrac{1}{38}g^2},$$

rapport qui ne diffère que par les signes qui p
cèdent y, de celui que nous avons donné page

149. L'expression de N se déduit comme ci-des

page 448, de l'équation $\gamma x = \frac{1}{N-1} a'$, ou

$$\tfrac{1}{2}(hx - a') = \frac{1}{N-1} \cdot a'.$$

Ayant mis à la place de hx et de a' leurs valeurs a
gébriques, on aura

$$a\left(\frac{x-y}{nxy+x} \cdot \frac{nxy+x+y}{nxy-x-y}\right) = \frac{1}{N-1} a\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-x-y} \cdot \frac{nxy-x+y}{nxy+x}\right),$$

et réduisant, puis dégageant N, on trouvera

$$N = \frac{nxy+y}{x-y},$$

comme à la page 448, sauf la différence déjà indi-
quée. La même équation donne

$$n = \frac{Nx - Ny - y}{xy}.$$

Pour avoir n', concevons qu[illegible] lignes $v\gamma$, $v\varepsilon$, q[illegible]
γq, se meuvent parallèlem[illegible] -mêmes, *en s'é-*
loignant du centre, jusq[illegible] le [illegible] latère
adsg se trouve inscrit [illegible]
comme le représente la fig[illegible]
suite de rapports,

qe (fi[illegible]8) : $e\gamma$ :: $q'e$ (fig. 100,

[illegible] :: $\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$: $\tfrac{2}{3}a + \frac{}{n}$

le décroissement qui produit le noyau hypothétique étant censé agir directement sur l'angle e du générateur. Donc $g':g :: 2a' : \frac{2n'+1}{n'-1}.a$. Mettant à la place des rapports entre g' et g, et entre a' et a ceux de leurs valeurs algébriques, et faisant les autres opérations convenables, on trouvera $n' = \frac{nxy - x + y}{2y}$, comme à la page 450, avec la différence ordinaire.

150. Il ne reste plus qu'à déterminer les incidences respectives des faces du dodécaèdre. En commençant par le rapport $C\omega : \omega\mu$ qui est celui du sinus au cosinus de la moitié de l'angle que font entre elles les faces NXQ, CXQ, on a d'abord $C\omega$ ou

$$g' = g.\frac{nry + x + y}{nxy + x} \text{ (p. 497)}.$$

On cherchera ensuite $\gamma\delta$ (fig. 98), qui est double de $\omega\mu$, en se servant de la proportion $dx : dr :: \gamma x : \gamma\delta$. Or,

$$dr = \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2},\ dx = \sqrt{(rx)^2 + (dr)^2} = \sqrt{(hu)^2 + dr^2},\ \gamma x = \tfrac{1}{2}(hx - a').$$

Substituant à la place de dx, dr et γx leurs valeurs lgébriques, et prenant la moitié de la valeur de $\gamma\delta$, aura celle de $\omega\mu$, et l'on trouvera g' ou

$$: \omega\mu :: \sqrt{(2nxy + x + y)^2 \tfrac{1}{3}a^2 + (nxy - x - y)^2 \tfrac{1}{4}g^2}$$
$$x - y)\sqrt{a^2},$$

qui e même, sauf la différence ordinaire, i ouvé page 453, pour les faces les

plus inclinées du dodécaèdre, lorsque dans les dé-croissemens sur E, ex est plus grande que eh.

Pour avoir ensuite le rapport $B\lambda$ ou g' à $\lambda\vartheta$ (fig. 9 ou celui du sinus au cosinus de la moitié de l'ang que font entre elles les faces CXQ, BXC du dodé-caèdre, il suffira de trouver l'expression algébrique de la quantité $\epsilon\zeta$ (fig. 98) double de $\lambda\vartheta$. La propor-tion qui y conduit est $gp : gu :: \epsilon x : \epsilon\zeta$. Or,

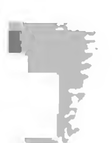
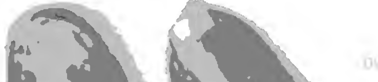
$$gp=\sqrt{(pu)^2+(gu)^2},\ \epsilon x=\gamma\epsilon+\gamma x=a'+\gamma x.$$

Mettant à la place de pu, gu, a' et γx leurs valeurs, on déduira de la proportion celle de la moitié de $\epsilon\zeta$ ou de $\lambda\vartheta$, et l'on aura définitivement

$$B\lambda:\lambda\vartheta::\sqrt{(nxy+2x-y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy-x-y)^2\tfrac{1}{4}g^2}$$
$$:(nxy+y)\sqrt{a^2},$$

rapport qui est encore le même, à l'exception des signes de y, que celui auquel nous sommes parvenu (p. 452), relativement aux faces les moins inclinées du dodécaèdre produit par le décroissement sur E.

151. Les résultats qui vont suivre dérivent des pro-priétés particulières à l'espèce de décroissement dont il s'agit ici. Le point d de l'arête qx (fig. 98) ayant, comme je l'ai déjà remarqué, une position fixe, pen-dant les variations que subit le dodécaèdre, si l'on suppose que la valeur de n augmente de plus en plus, la quantité ax ira au contraire en diminuant, et au terme où n sera infinie, l'arête qx se confondant avec la diagonale oblique ad, les faces du noyau hy-

pothétique se trouveront sur les mêmes plans que celles du générateur, ce qui ne pourra se faire sans que les bords NQ, CQ, etc. (fig. 97), ne coïncident avec les arêtes *du*, *db*, etc. Il en résulte qu'alors y s'évanouit, et c'est effectivement ce qu'indique la formule relative à ce cas. Pour le prouver, servons-nous encore des rapports entre les diagonales du noyau hypothétique et du générateur, qui donnent la proportion suivante :

$$g^2 : p^2 :: g^2 : \tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy-x+2y}{nxy-x-y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g^2;$$

d'où l'on tire

$$3p^2-g^2=\tfrac{1}{3}a^2\left(\frac{nxy-x+2y}{nxy-x-y}\right)^2;$$

et parce que $3p^2-g^2$ représente le tiers du carré de l'axe, $\left(\frac{nxy-x+2y}{nxy-x-y}\right)^2=1$; ce qui donne, toute réduction faite, $y=0$.

152. A l'égard du cas où le dodécaèdre se trouverait changé en une double pyramide droite, il est facile de juger, à la seule inspection de la figure 98, qu'il ne peut avoir lieu en vertu du décroissement que nous considérons ici, puisque le point *d* de l'arête *qx* étant toujours plus éloigné du sommet *x* que du sommet *h*, quelque position que l'on donne à cette arête, jamais on n'aura $qx=qh$, ou $ex=eh$. Voyons ce que donne la formule relative à cette équation. Si nous substituons à la place de *ex* et

de *eh* leurs valeurs algébriques, nous aurons

$$2nxy + x + y = nxy + 2x - y;$$

d'où l'on tire $n = \frac{x - 2y}{xy}$. Mettons à la place de n cette valeur dans les équations

$$ay = \frac{x + y}{nxy}\sqrt{g^2 + p^2} \text{ et } av = \frac{2px}{nxy - y};$$

la première devient $ay = \frac{x + y}{x - 2y}\sqrt{g^2 + p^2}$, et la seconde $av = \frac{2px}{x - 3y}$. On voit que toutes les fois que x surpassera $2y$, la valeur de ay sera une quantité rationnelle plus grande que l'unité ; la même chose aura lieu pour la valeur de av, tant que x surpassera $3y$. Donc, dans tous les cas de l'un ou l'autre genre, ay ou av étant plus grande l'une que l'arête ds, et l'autre que la diagonale ad, les lignes qx et gp se rejetteront vers la partie opposée de l'axe, en prenant des positions telles que yz, vt (fig. 100), et la ligne gp (fig. 98) entraînant avec elle sa parallèle vx, celle-ci passera à la position φz (fig. 100). Le même changement aura lieu à l'égard des lignes vh, qh (fig. 98), qui se rejetteront vers la partie supérieure de l'axe. Il en résulte qu'alors le dodécaèdre sera devenu une double pyramide droite par un effet analogue à celui des décroissemens ordinaires produits par renversement.

En effet, d'une part,

$$sz : ds :: as + sz : ay,$$

ou

$$sz : \sqrt{g^2 + p^2} :: a + sz : \frac{x-y}{x-2y}\sqrt{g^2+p^2},$$

ce qui donne

$$sz = a\left(\frac{x-2y}{3y}\right).$$

D'une autre part,

$$st : gs :: at : av; \text{ ou } st : 2p :: a + st : \frac{2px}{x-3y},$$

ce qui donne

$$st = a\left(\frac{x-3y}{3y}\right).$$

Donc

$$dr : rz :: \sqrt{\tfrac{4}{36}g^2} : \tfrac{1}{3}a + a\left(\frac{x-y}{3y}\right) :: \sqrt{\tfrac{4}{36}g^2} : \left(\frac{x-y}{3y}\right)a,$$

et

$$gu : ut :: \tfrac{2}{3}a + a\left(\frac{x-2y}{3y}\right) :: \sqrt{\tfrac{4}{36}g^2} : \left(\frac{x-y}{3y}\right)a.$$

Or, les deux rapports étant identiques, il en résulte que les lignes yz, et vt, ou sa parallèle φz, sont également inclinées en sens contraire, ce qui indique la double pyramide droite.

La loi qui donne cette double pyramide rentre alors parmi les décroissemens intermédiaires qui ont lieu directement sur les angles latéraux *dba*, *n'ba* (fig. 96), par une suite de ce que la ligne *ct* au lieu

de se rejeter vers le sommet s, comme auparavant, s'incline vers le sommet a. Tant que bm est plus grande que bt, le décroissement se fait de manière que x est dans le sens de D et y dans celui de B. Lorsque bt devient égale à bm, on a l'équivalent du décroissement ordinaire sur les mêmes angles, d'où résulte la double pyramide; et parce que ce décroissement a lieu par trois rangées (p. 355), on a

$$bm = bt = 3by.$$

Dans l'équation $st = a\left(\frac{x-3y}{3y}\right)$ ou $st = a\left(\frac{bm-3by}{3by}\right)$, la valeur de st s'évanouit alors, c'est-à-dire que l'arête vt se confond avec la diagonale gs, d'où il suit que φz devient parallèle à cette diagonale, comme cela doit être dans le cas présent.

Lorsqu'ensuite bt devient plus grande que bm, on a l'équivalent d'un décroissement intermédiaire sur les angles latéraux, dans lequel x coïncide avec B, et y avec D. Il y a un terme où bt devenant infinie, bm s'évanouit, et la ligne ct devient parallèle à l'arête ba. Ce terme répond au cas où, dans l'équation sz (fig. 100) $= a\left(\frac{x-2y}{3x}\right)$, x est double de y, ce qui donne $sz = \frac{a \times 0}{3y}$; c'est-à-dire que sz étant nulle, l'arête yz coïncide avec ds. On a alors l'effet du décroissement ordinaire par deux rangées sur les bords B du générateur, d'où résulte la double pyramide droite (p. 297).

Au-delà du même terme, x devenant plus petit que $2y$, la valeur de sz ou $a\left(\frac{x-2y}{3y}\right)$ est négative, alors les lignes yz, φz se réunissent en un point situé entre les sommets s, a, et le résultat est censé appartenir aux décroissemens intermédiaires sur l'angle supérieur A du générateur, qui feront l'objet de l'article suivant.

153. La cristallisation ne m'a encore offert qu'une seule forme à laquelle l'espèce de décroissement qui vient de nous occuper soit applicable, savoir, celle dont on voit la projection (fig. 101), et qui a pour signe $\underset{c}{\overset{2}{e}}\,\underset{v}{(\overset{\frac{5}{3}}{E}D^{3}D^{1}D^{1}D^{3})}\,\underset{r}{\overset{2}{D}}\,\underset{\overset{3}{t}}{B}$. Les facettes v qui dépendent du décroissement intermédiaire sont interposées entre les faces r de la variété métastatique et les faces c qui appartiennent au prisme hexaèdre régulier. Il résulte de cette disposition que la figure des faces c, qui serait celle d'un trapézoïde, si elles existaient solitairement, devient un rhombe par l'effet de ses intersections avec les facettes v, v'. Je prouverai plus bas que l'existence de ce rhombe peut avoir lieu pour un rhomboïde quelconque, et en vertu d'une infinité de combinaisons différentes de deux décroissemens, l'un ordinaire sur les bords inférieurs du générateur, l'autre intermédiaire sur les angles compris entre ces bords. De plus, le cristal est terminé de chaque côté par les facettes t, t, dont les

intersections avec les faces *r*, *r*, sont sur un même plan horizontal, et je ferai voir que cette propriété est de même indépendante des angles du générateur, et peut exister en vertu d'une infinité de combinaisons de deux décroissemens ordinaires, l'un sur les bords inférieurs, l'autre sur les bords supérieurs du générateur. C'est du caractère de symétrie qu'impriment à cette variété les deux assortimens dont je viens de parler, que j'ai emprunté son nom de *chaux carbonatée euthétique*, c'est-à-dire qui offre des positions heureusement combinées.

Si dans le rapport des demi-diagonales g' et p' du noyau hypothétique (p. 497), on fait $n=\frac{5}{3}$, $x=3$, $y=1$, on trouve $g' : p' :: \sqrt{3} : \sqrt{17}$, ce qui fait connaître que le noyau dont il s'agit est semblable à la variété contrastante (p. 378). Les mêmes substitutions donnent $N=3$, ce qui est l'indice d'un décroissement par trois rangées sur les bords inférieurs du noyau hypothétique; et $n'=\frac{3}{2}$, comme nous l'avions déjà trouvé par une autre méthode (p. 378). L'incidence de *v* sur *v*, ou de *v'* sur *v'* sera de $152^d 28' 22''$; celle de *v* sur *v'*, de $88^d 55' 8''$; et celle de *c* sur *v*, de $164^d 3' 16''$.

J'ai maintenant à démontrer les deux propriétés qui ont été énoncées plus haut. La première consiste en ce que les facettes *c*, *c* ont la figure d'un rhombe, par une suite de la manière dont elles sont coupées par les plans *v*, *r*.

Concevons que l'une quelconque de ces facettes



soit divisée par une diagonale horizontale en deux triangles isocèles dont cette diagonale sera la base commune, et dont l'un, que nous désignerons par T, proviendra du décroissement ordinaire sur D, et l'autre qui sera indiqué par S, résultera du décroissement intermédiaire sur *e*. Soit *b* la base commune des deux triangles, *h* l'apothème du triangle T, *h'* celui du triangle S, *n* la loi relative au décroissement sur D, et *n'* celle qui se rapporte au décroissement sur *e*.

Maintenant *adsg* (fig. 102) étant la coupe principale du noyau, et *dp*, *dy*, deux arêtes contiguës du dodécaèdre produit par le décroissement sur D, si par le milieu *o* de la diagonale oblique *ad* nous menons *oz* parallèle à l'axe *py*, nous aurons

$$\tfrac{1}{2}b : h :: g : oz :: g : \tfrac{1}{2}ay :: g : \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{n-1}\cdot a\right) :: g \quad \tfrac{1}{2} \ \frac{n}{n-1}.$$

D'une autre part, si nous menons $\omega\psi$ (fig. 98) parallèle à l'axe *hx*, nous aurons

$$\tfrac{1}{2}b : h' :: g' : \omega\psi :: g' : \tfrac{1}{2}\gamma x$$
$$:: g \cdot \frac{n'xy+x+y}{n'xy+x} : \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{n'xy+x+y}{n'xy-x-y} \cdot \frac{x-y}{n'xy+x}$$
$$:: g : \tfrac{1}{2}a \frac{x-y}{n'xy-x-y}.$$

On aura donc, dans le cas du rhombe,

$$\tfrac{1}{2}a \cdot \frac{n}{n-1} = a \cdot \frac{x-y}{n'xy-x-y},$$

d'où l'on tire

$$n'=\frac{2nx-x+y}{nxy}, \text{ et } n=\frac{y-x}{n'xy-2x}.$$

Dans le cas présent $x=3$, $y=1$, $n'=\frac{5}{3}$, $n=2$, ce qui donne $\frac{5}{3}$ pour chaque membre de la première équation, et 2 pour chaque membre de la seconde.

Reste à démontrer la propriété en vertu de laquelle les faces des deux dodécaèdres qui proviennent l'un d'un décroissement sur D, l'autre d'un décroissement sur B, se rencontrent de manière que leurs intersections se trouvent sur un même plan perpendiculaire à l'axe. Il est d'abord facile de concevoir que les intersections dont il s'agit ont leur origine aux angles solides E, E du générateur. Soit *am* (fig. 103) celle des arêtes du solide provenant du décroissement sur B, laquelle répond à la diagonale oblique *ad* du générateur. Si l'on mène *gu* perpendiculaire sur l'axe, et qu'on la prolonge jusqu'à la rencontre *x* de *am*, le point *x* situé vis-à-vis du point *g*, qui est un des angles latéraux du générateur, sera le point d'intersection de l'arête *am* avec celle qui lui correspond sur le dodécaèdre produit par le décroissement sur D; soit *pd* (fig. 102) cette dernière arête. Si nous prolongeons de même *gu* jusqu'à ce qu'elle coupe en *t* l'arête dont il s'agit, le point *t* devra se confondre avec le point *x* (fig. 103), c'est-à-dire que $ux=ut$. Soit n' le nombre de rangées soustraites relatif au décroissement sur B, et n celui qui se rapporte au dé-

croissement sur D, nous aurons

$$ux\,(\text{fig. }103)=\frac{n'+1}{2n'-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}\ (\text{p. }294).$$

D'une autre part,

$$ap\,(\text{fig. }102)=\frac{1}{n-1}.a,\ pr:dr::pu:ut;$$

ou

$$\left(\frac{1}{n-1}+\frac{2}{3}\right)a : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\right)a : ut;$$

donc

$$ut=\frac{n+2}{2n+1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}=\frac{n'+1}{2n'-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

d'où l'on tire $n'=n+1$.

Parmi les différentes lois de décroissement qui déterminent les formes des variétés de chaux carbonatée, on en connaît huit, dont quatre ont pour expressions B_2, B_3, B_4, B_6, et les quatre autres $\overset{1}{D}$, $\overset{2}{D}$, $\overset{3}{D}$, $\overset{5}{D}$, ce qui donne les combinaisons suivantes, $\overset{1}{D}B_2$, $\overset{2}{D}B_3$, $\overset{3}{D}B_4$, $\overset{4}{D}B_6$, qui toutes réalisent la propriété que je viens de démontrer. Mais jusqu'ici il n'y a que les deux lois représentées par la seconde qui soient associées dans une même cristallisation, qui est celle de la variété euthétique; les autres agissent solitairement dans la production des formes qui en offrent les résultats.

IV. *Décroissemens intermédiaires sur l'angle* A.

154. Cette espèce de décroissement est distinguée des précédentes surtout par l'égalité qui existe constamment entre l'axe du rhomboïde *adn's* (fig. 104), qui y fait la fonction de générateur et celui du dodécaèdre secondaire *a*NB*s*. Il en résulte que les extrémités du même axe sont les seuls points qui soient communs aux deux solides.

Soit *adsg* (fig. 105) la coupe principale du générateur, et *an*, *sn*, *aλ*, *sλ*, les quatre arêtes du dodécaèdre situées dans le même plan que cette coupe. En comparant cette figure avec la 74ᵉ, pl. 21, on voit que la ligne *ax*, qui dans celle-ci mesure la distance entre les sommets des deux solides, disparaît dans l'autre; et que les lignes *ay*, *av*, ou les prolongemens de *ag*, *ad*, sont remplacées par les lignes *dv*, *gϑ* (fig. 105), qui sont les prolongemens de l'arète et de la diagonale opposées à celles de la figure 74. Ainsi, au lieu des expressions des quatre données *ap*, *ax*, *ay*, *av*, à l'aide desquelles nous avons résolu les problèmes relatifs au décroissement sur E, nous n'aurons, dans le cas présent, que celles de *dv*, *gϑ*, qui suffiront pour nous conduire au même but.

Si nous continuons de prendre pour terme de comparaison les formules qui dépendent du décroissement sur E, dans lequel *x* coïncide avec D, nous trouverons qu'en général ces dernières passent à celles du décroissement sur A, par la substitution de *x* à *y*, et

de $-y$ à x, dans les quantités où elles ne sont multipliées ni par n, ni l'une par l'autre. Je ferai connaître les exceptions à mesure qu'elles se présenteront.

155. Soit *as* (fig. 106) le générateur, et *ltf*, *cef*, deux plans parallèles aux faces N*a*Q (fig. 104), C*a*Q, pris de manière que *lt*, *ce*, représentent les lignes de départ du décroissement. Nous aurons, en appliquant ici ce qui a été dit des autres décroissemens,

$$al = nx\sqrt{g'^2 + p'^2},\ at = ny\sqrt{g'^2 + p'^2},\ am = 2p'ny,$$

et

$$af = \sqrt{g'^2 + p'^2};$$

et parce que les triangles *maf* (fig. 106), *adv* (fig. 105) sont semblables, $am : af$ (fig. 106) $:: ad : dv$. Or, dans le cas particulier dont il s'agit ici, ces triangles font l'un à l'égard de l'autre les mêmes fonctions que les triangles *tbc* (fig. 96) et *day* (fig. 98) ; d'où il suit que l'expression de *dv* (fig. 105) sera la même que celle qui a été trouvée (p. 493) pour *ay* ; c'est-à-dire que $dv = \frac{x+y}{nxy}\sqrt{g^2 + p^2}$.

La construction de la figure 106 peut encore nous servir pour trouver l'expression de $g\vartheta$ (fig. 105). Car soit *ir* (fig. 106) une ligne située en sens contraire de la ligne *tf*, et inclinée de la même quantité. Si nous menons *tl* et *fl*, les deux plans *ltf*, *lir*, seront parallèles aux faces Q*a*C, B*a*C (fig. 104) du dodécaèdre. Menons *fz* (fig. 106) parallèle à *at* et égale à *af*, puis *az*. Les triangles semblables *ato*, *fzc*,

donnent $at : af :: ao : oz = az - ao$. Substituant à la place de at et de $fz = af$ leurs expressions trouvées ci-dessus, et à la place de az la quantité $2p$, nous aurons

$$ny\sqrt{g'^2+p'^2} : \sqrt{g'^2+p'^2} :: ao : 2p' - ao,$$

d'où l'on tire

$$ao = \frac{2p'ny}{ny+1}.$$

Maintenant les triangles semblables alf (fig. 106), $ag\vartheta$ (fig. 105), donnent

$$al = nx\sqrt{g'^2+p'^2} : ao :: ag : g\vartheta,$$

ou

$$nx\sqrt{g'^2+p'^2} : \frac{2p'ny}{ny+1} :: \sqrt{g^2+p^2} : g\vartheta,$$

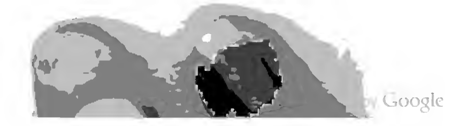
ou

$$nx\sqrt{g^2+p^2} : \frac{2pny}{ny+1} :: \sqrt{g^2+p^2} : g\vartheta;$$

donc $$g\vartheta = \frac{2py}{nxy+x}.$$

Cette expression, comparée avec celle de $a\nu$ (p. 495), laquelle est $\frac{2px}{nxy-y}$, et se rapporte au décroissement sur e, présente, comme par exception, les différences que nous avons dit avoir lieu généralement (p. 510) entre les formules relatives au décroissement sur A et celles qui dépendent du décroissement sur E.

156. Je commencerai les applications, comme à l'ordinaire, en cherchant le rapport entre les demi-diagonales g' et p' du noyau hypothétique dont la



coupe principale est représentée par le quadrilatère $a'\varkappa s'\lambda$ (fig. 107). Ce rapport dépend de celui de $a\omega$ à ωs, et pour avoir ce dernier, il faut chercher successivement ceux de $\varkappa\omega$ à ωs, et de $\varkappa\omega$ à $a\omega$.

Ayant mené $\vartheta\sigma$ (fig. 105) perpendiculaire sur l'axe as, nous aurons

$$\varkappa\omega : \omega s :: \lambda\mu : a\mu :: \vartheta\sigma : a\sigma,$$

Cherchons $\vartheta\sigma$ et $a\sigma$.

1°. Pour $\vartheta\sigma$. Nous avons

$$sg : s\vartheta :: gu : \vartheta\sigma,$$

ou

$$2p : 2p + \frac{2py}{nxy+x} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \vartheta\sigma = \frac{nxy+x+y}{nxy+x}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

2°. Pour $a\sigma$.

$$\vartheta\sigma : \sigma s = as - a\sigma :: gu : us,$$

ou

$$\frac{nxy+x+y}{nxy+x}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : a - a\sigma :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{2}{3}a :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : \tfrac{1}{3}a;$$

d'où l'on tire

$$a\sigma = a - \left(\frac{nxy+x-y}{nxy+x}\right)\tfrac{2}{3}a = \frac{nxy+x-2y}{3nxy+3x}.a.$$

Ces expressions de $\vartheta\sigma$ et $a\sigma$ substituées dans la proportion $\varkappa\omega : \omega s :: \vartheta\sigma : a\sigma$, donnent

$$\varkappa\omega : \omega s :: (3nxy+3x+3y)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : (3nxy+x-2y)a.$$

Le second rapport, qui est celui de $\varkappa\omega$ à $a\omega$, dépend de la proportion $\varkappa\omega : a\omega :: \nu\tau : a\tau$.

1°. Pour $\nu\tau$.

$$sd : s\nu = sd + d\nu :: dr : \nu\tau,$$

ou

$$\sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{g^2+p^2} + \frac{x+y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$

$$: \nu\tau = \frac{nxy+x+y}{nxy}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

2°. Pour $a\tau$.

$$\nu\tau : \tau s = as - a\tau :: dr : rs,$$

ou

$$\frac{nxy+x+y}{nxy}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : a - a\tau :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} \gamma \tfrac{1}{3}a;$$

d'où l'on tire

$$a\tau = a - \frac{nxy+x+y}{nxy}.a = \frac{2nxy-x-y}{3nxy}.a.$$

Donc

$$\kappa\omega : a\omega :: \frac{nxy+x+y}{nxy}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2nxy-x-y}{3nxy}.a$$

$$:: (3nxy+3x+3y)\tfrac{4}{3}g^2 : (2nxy-x-y)a;$$

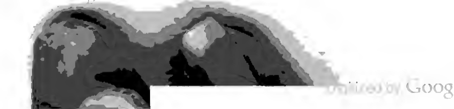
donc

$$a\omega : \omega s :: 2nxy-x-y : nxy+x-2y.$$

Soit $2nxy-y-x=m$ et $nxy+x-2y=n$. Nous aurons $m+n : m :: as : a\omega$. Et mettant à la place de m, n, as, leurs valeurs, puis réduisant,

$$3nxy-3y : 2nxy-x-y :: a : a\omega = \frac{2nxy-x-y}{3nxy-3y}.a.$$

$$\omega s = as - a\omega = a - \left(\frac{2nxy-x-y}{3nxy-3y}\right) = \frac{nxy+x-2y}{3nxy-3y}.a.$$



Mais nous avons eu

$$n\omega=\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}:\omega s::(3nxy+3x+3y)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:(nxy+x-2y)a.$$

Mettant à la place de ωs sa valeur, et réduisant, on trouvera $g'=g.\frac{nxy+x+y}{nxy-y}$, quantité dont le dénominateur seul est affecté de la différence indiquée plus haut (p. 510).

La valeur de p' dépend de celle de a' qu'il faut d'abord trouver. Or, $a\omega-\omega s$ est le tiers de cette dernière; prenant la différence entre les expressions de $a\omega$ et ωs, et la triplant, on trouve

$$a'=a\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right);$$

donc

$$9p'^2-3g'^2=a\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right).$$

Mettant à la place de g'^2 sa valeur, puis dégageant p', on aura

$$p'=\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy+x+y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g^2\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-y}\right)^2};$$

donc

$$g':p'::g:\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g^2},$$

rapport qui est le même, sauf la différence indiquée, que celui qui a été trouvé pour les décroissemens sur E (p. 456), dans le cas où le dodécaèdre tourne, comme ici, ses arêtes les moins saillantes vers les faces du générateur.

157. Pour avoir N, on considérera que l'axe du dodécaèdre étant égal dans le cas présent à l'axe du générateur, la partie de l'axe du premier, qui excède l'axe du noyau hypothétique est $\frac{1}{2}(a-a')=\frac{x-y}{nxy-y}$, toute réduction faite. Donc

$$\frac{1}{N-1}a'=\frac{x-y}{nxy}.a=\frac{nxy-y}{nxy-2x+y}.a';$$

d'où l'on tire

$$N=\frac{nxy-x}{x-y},$$

expression qui est la même que celle de N (p. 457), dans l'hypothèse de *ex* plus grande que *eh*, en ayant égard à la différence indiquée. La même équation donne $n=\frac{Nx-Ny+x}{xy}$.

158. Concevons que les quatre côtés du quadrilatère $a'rs'\lambda$ se meuvent parallèlement à eux-mêmes, en s'éloignant du centre, jusqu'à ce que les points a', s', se confondent avec les points a, s, comme on le voit. fig. 108. Il est visible que le décroissement d'où résulterait un rhomboïde semblable au noyau hypothétique agirait sur les angles supérieurs du générateur. Soit toujours n' le nombre de rangées soustraites. Nous aurons d'une part

$$n'r : ar :: n\omega \text{ (fig. 107)} : a\omega :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{2}{3}a',$$

et d'une autre part

$$n'r \text{ (fig. 108)} : ar :: (n'+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n'-1}{n'+1}\sqrt{a^2};$$



donc

$$g' : g :: 2a' : \frac{2n'-1}{n'+1} . a.$$

Substituant aux rapports entre g et g' et entre a et a' ceux de leurs valeurs algébriques, on aura

$$nxy+x+y : nxy-y :: 2nxy-4x+2y : \frac{2n'-1}{n'+1}(nxy-y);$$

d'où l'on tire

$$n' = \frac{nxy-x+y}{2x},$$

comme nous l'avons eu pour les décroissemens sur E (p. 458), en tenant compte de la différence ordinaire.

159. Pour avoir le rapport entre le sinus et le cosinus de la moitié de l'incidence de NaQ sur CaQ, menons $a'f$ perpendiculaire sur $a\nu$ (fig. 107), et du milieu o de $a'\nu$ une autre perpendiculaire sur la même ligne $a\nu$. Le rapport cherché sera celui de g' à oh, moitié de $a'f$, dont il s'agit de trouver l'expression. Les triangles semblables $a'af$, $a\nu\omega$ ou $a\nu\tau$ (fig. 105), donnent

$$a\nu : \nu\tau :: aa' : a'f, \quad a\nu = \sqrt{(a\tau)^2 + (\nu\tau)^2}$$

$$= \sqrt{a^2\left(\frac{2nxy-x-y}{3nxy}\right)^2 + \left(\frac{nxy+x+y}{nxy}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2} \text{ (p. 514)},$$

$$aa' = \tfrac{1}{2}(as - a's) = \tfrac{1}{2}(a-a') = a - a\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right)$$

$$= a . \frac{x-y}{nxy-y}.$$

Mettant dans la proportion précédente à la place

de $a\nu$, $\nu\tau$ et aa' leurs valeurs, et cherchant celle de $a'f$, on aura

$$a'f = \frac{(nxy + x + y)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} \times a \cdot \frac{x - y}{nxy - y}}{\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2(2nxy - x - y)^2 + (nxy + x + y)^2 \tfrac{4}{3}g^2}}$$

Prenant la valeur de g' ou $g \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy - y}$ pour le premier terme du rapport et la moitié de $a'f$ pour le second terme, on trouvera que le sinus est au cosinus de l'angle cherché

$$:: \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2(2nxy - x - y)^2 + (nxy + x + y)^2 4g^2} : (x - y)\sqrt{a^2},$$

rapport qui conserve l'analogie ordinaire avec celui qui a été trouvé (p. 453) entre Cλ et $\lambda\vartheta$.

160. Passons à la détermination de l'incidence respective des faces QaC, BaC. Si du sommet s' (fig. 107) de l'axe du noyau hypothétique et du milieu l de la diagonale $s'\lambda$ nous menons $s't$ et lu perpendiculaires sur l'arête $a\lambda$, le rapport entre le sinus et le cosinus de la moitié de l'angle qui donne l'incidence cherchée sera celui de g' à lu moitié de $s't$. Tout se réduit donc à trouver l'expression de cette dernière ligne. Or, les triangles semblables $as't$, $a\lambda\mu$ donnent

$$as' : s't :: a\lambda : \lambda\mu :: a\vartheta \text{ (fig. 105)} : \vartheta\sigma,$$

$$as' = as - ss' \text{(fig. 107)} = as - aa'$$

$$= a - a\left(\frac{x - y}{nxy - y}\right) \text{(p. 517)} = a \cdot \frac{nxy - y}{nxy - x},$$

$$a\vartheta = \sqrt{(\vartheta\sigma)^2 + (a\sigma)^2} = \sqrt{\left(\frac{nxy + x + y}{nxy + x}\right)\tfrac{4}{3}g^2 + \left(\frac{nxy + x - 2y}{3nxy + 3x}\right)a \cdot}$$



Mettant, dans la proportion précédente, à la place de as', $a\vartheta$ et $\vartheta\sigma$ leurs valeurs, et prenant celle de $s't$, on trouve

$$s't = \frac{\frac{nxy - x}{nxy - y} \cdot a \sqrt{(nxy + x + y)^2 \frac{4}{3} g^2}}{\sqrt{(nxy + x - 2y)^2 \frac{1}{3} a^2 + (nxy + x + y)^2 \frac{4}{3} g^2}}.$$

Donc la valeur de g' étant le premier terme du rapport et la moitié de celle de $s't$ étant le second, le sinus cherché sera au cosinus

$$:: \sqrt{(nxy + x - 2y)^2 \frac{1}{3} a^2 + (nxy + x + y)^2 4 g^2} : (nxy - x) \sqrt{a^2}.$$

Comparez ce rapport avec celui qui a été trouvé (p. 452) entre $B\omega$ et $\omega\mu$.

161. A mesure que n diminue, l'angle que font entre elles les faces QaC, BaC augmente, et il y a un terme où ces faces se trouvant sur un même plan, le dodécaèdre se trouve converti en rhomboïde. On peut aussi considérer ce rhomboïde comme le résultat d'un décroissement ordinaire par renversement sur les angles A.

Soit $adsg$ (fig. 109) la coupe principale du générateur, et soit aor le triangle mensurateur relatif au rhomboïde dont il s'agit. Soit n' la loi qui le produit par renversement. De plus, soit as (fig. 110) le générateur, gl et fh les directions des bords des lames qui subissent le décroissement intermédiaire, lorsque le dodécaèdre s'est converti en rhomboïde; soit gk une autre direction qui a lieu sur la face $agnu$.

Dans ce cas $al = ak$. Or, $al = y$; donc $n = \frac{1}{ak} = \frac{1}{y}$.

On peut obtenir le même résultat en considérant que, dans le cas présent, le cosinus de la demi-incidence des faces QaC, BaC (fig. 104) s'évanouit. Donc $(nxy-x)\sqrt{a^2}=0$ (p. 519), ou simplement

$$nxy-x=0;$$

donc

$$nxy=x,\ ny=1,\ \text{et}\ n=\frac{1}{y}.$$

Cherchons le rapport entre ga ou x, et al ou y, et menons auparavant lk, puis gt, au point où lk coupe la diagonale ad. Soit gt (fig. 109) la même ligne que fig. 110. Les triangles semblables aor, atg, donnent

$$ag : at :: or : ao :: n'\sqrt{g'^2+p'^2} : p'.$$

Mais ag (fig. 109 et 110) $=x\sqrt{g'^2+p'^2}$, et at renferme autant de fois p' qu'il y a d'arêtes de molécule renfermées dans al; et puisque ce nombre d'arêtes est y, nous aurons $at=yp'$; donc nous aurons au lieu de $ag : at :: n'\sqrt{g'^2+p'^2} : p'$,

$$x\sqrt{g'^2+p'^2} : yp' :: n'\sqrt{g'^2+p'^2} : p',\ \text{ou}\ x : y :: n' : 1.$$

On voit combien il est facile de passer du décroissement ordinaire à celui qui est intermédiaire.

Soit $n'=\frac{3}{2}$ comme dans le cuivre gris mixte.

Alors $$x : y :: n' : 1 :: 3 : 2;$$

donc on peut faire $x=3$, $y=2$; donc $n'=\frac{1}{2}$.

Dans ce cas, le rapport entre le sinus et le cosinus

de la demi-incidence des faces du rhomboïde est égal au rapport entre le sinus et le cosinus de celle des faces NaQ, CaQ (fig. 104); c'est-à-dire au rapport

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2(2nxy-x-y)^2+(nxy+x+y)^2 4g^2} : (x-y)\sqrt{a'^2}.$$

Mais $g=\sqrt{1}$, $p=\sqrt{3}$, $a=\sqrt{24}$, $x=3$, $y=2$, $n=\frac{1}{2}$. Donc

$$\sin\tfrac{1}{2}\text{incid.} : \text{cosin} :: \sqrt{8(6-5)^2+(3+5)^2 4} : \sqrt{24}$$
$$:: \sqrt{66} : \sqrt{6} :: \sqrt{11} : 1.$$

D'une autre part, dans un rhomboïde,

$$\sin\tfrac{1}{2}\text{incid} : \cos :: \sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{3p^2-g^2}.$$

Or ici, $g=\sqrt{8}$, $p=\sqrt{3}$; donc

$$\sin\tfrac{1}{2}\text{incid.} : \cos :: \sqrt{11} : \sqrt{1},$$

ce qui est le même rapport.

162. Le cas où $a\omega$ étant égale à ωs, le dodécaèdre devient une double pyramide droite hexaèdre, peut aussi avoir lieu en vertu du décroissement dont il s'agit ici. On a alors

$$2nxy-x-y=nxy+x-2y,$$

d'où l'on tire

$$n=\frac{2x-y}{xy}, \text{ au lieu de } n=\frac{x+2y}{xy} \text{ (p. 454)}.$$

Si l'on substitue cette valeur $\frac{2x-y}{xy}$ de n dans celle

de a' qui est $a\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right)$, on trouve $a'=a\left(\frac{0}{2x-2y}\right)$, ce qui doit être, puisqu'alors le noyau hypothétique s'évanouit.

Si n diminue au-delà du terme qui donne la double pyramide, $a\omega$ deviendra plus petite que ωs, et les faces NaQ, CaQ (fig. 104) feront entre elles de plus petits angles que les faces QaC, BaC. En même temps le noyau hypothétique tournera ses diagonales obliques vers les arêtes ds, ag, et ses arêtes vers les diagonales ad, sg, comme on le voit figure 111.

La valeur de g' sera la même que ci-dessus (p. 515), c'est-à-dire que $g'=g.\frac{nxy+x+y}{nxy-y}$.

Pour avoir celle de p', on mettra $\omega s-a\omega$ à la place de $a\omega-\omega s$, ou $2x-y-nxy$ à la place de $nxy-2x+y$ (p. 515), et en suivant la même marche pour le calcul, on aura

$$a'=a.\frac{2x-y-nxy}{nxy-y}, \text{ ou } a=a'.\frac{nxy-y}{2x-y-nxy},$$

et

$$p'=\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x-y-nxy}{nxy-y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g \ldots \left(\ldots+y\right)^2};$$

donc

$$g':p'::g:\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x-y-\ldots}{nxy+x\ldots}\right.\ldots}$$

rapport q... ère de celui que n...
(p. 515), ... angement de sig...
qui former... érateur de la fra...

par $\frac{1}{9}a^2$, ce qui est conforme à l'analogie des autres décroissemens.

En poursuivant le calcul, d'après la même substitution, on trouvera

$$N = \frac{x-y}{nxy-x} \text{ au lieu de } N = \frac{nxy-x}{x-y},$$

d'où l'on déduira $n = \frac{Nx+x-y}{Nxy}$.

Pour avoir l'expression de n', on supposera que les côtés de la coupe principale $a'ns'\lambda$ (fig. 111) du noyau hypothétique se meuvent parallèlement à eux-mêmes en s'écartant de l'axe, jusqu'à ce que la coupe principale du générateur se trouve inscrite dans la précédente, comme le représente la fig. 112. Il est facile de juger, à la seule inspection de celle ci, que le décroissement relatif à n' est censé agir par renversement sur l'angle supérieur de la face du générateur à laquelle appartient la diagonale *ad*.

Or, d'une part,

$$\lambda'r : ar :: \lambda\mu \text{ (fig. 111)} : a'\mu :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{2}{3}a';$$

d'une autre part,

$$\lambda'r : ar \text{ (fig. 112)} :: (n'+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{1-2n'}{3} \cdot a \text{ (p. 317)};$$

donc

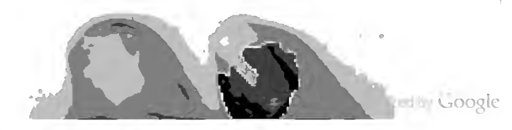
$$g : g' :: \frac{1-2n'}{n'+1} \cdot a : 2a'.$$

$$g \cdot \frac{nxy+x+y}{nxy-y}, \text{ et } a' = a \cdot \frac{2x-y-nxy}{nxy-y}.$$

Si dans la proportion précédente on met à la place des rapports entre g' et g, et entre a' et a, ceux de leurs expressions algébriques, et que l'on dégage n', on trouvera $n'=\frac{nxy-x+y}{2x}$, valeur qui est la même que celle qui a été trouvée (p. 517) pour le cas où $a\omega$ est plus grande que ωs, parce que le décroissement se fait de part et d'autre sur l'angle A du générateur, en sorte qu'il ne tient qu'à la valeur de n qu'il agisse d'une manière directe ou par renversement. Le premier cas aura lieu toutes les fois que n sera plus grande que la quantité $\frac{2x-y}{xy}$ (p. 521) qui donne la double pyramide droite, et le second toutes les fois qu'elle sera plus petite.

Quant aux rapports entre les sinus et les cosinus des angles qui donnent les moitiés des incidences des faces du dodécaèdre, ils restent les mêmes que dans le cas de $a\omega$ plus grande que ωs, par une raison semblable à celle que j'ai exposée page 458.

163. Si l'on s'en tient aux résultats admissibles en Cristallographie, l'hypothèse dans laquelle le noyau hypothétique serait semblable au générateur ne peut être réalisée par l'espèce de décroissement dont il s'agit ici. Car il est facile de voir que pendant toutes les variations de x, y et n, qui modifient les angles du dodécaèdre secondaire, l'axe du noyau hypothétique ne pouvant surpasser en longueur celui du générateur, et d'une autre part la quantité $n\omega$



(fig. 197) ou $\sqrt{\frac{4}{3}g'^2}$ étant toujours plus grande que *dr* (fig. 105) ou $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$, il n'arrive jamais que les dimensions du noyau hypothétique soient en rapport avec celles du générateur. Cependant, comme le calcul conduit à des formules qui représentent ce dernier cas, j'ai cru qu'il ne serait pas inutile de faire connaître ce que signifient ces formules, et de donner ici un nouvel exemple de ces sortes d'excursions que font les théories, au-delà des limites tracées par les résultats de la nature.

Concevons que l'axe du noyau hypothétique soit égal à celui du générateur. Faisant $a'=a$, dans l'équation $a'=\frac{2x-y-nxy}{nxy-y}$, nous aurons

$$2x-y-nxy=nxy-y,$$

ce qui donne $n=\frac{1}{y}$. Si nous mettons cette valeur à la place de n, dans la quantité $(nxy-x)\sqrt{a^2}$ (p. 519) qui représente le cosinus de la moitié de l'angle que font entre elles les faces Q*a*C, B*a*C (fig. 104) du dodécaèdre secondaire, nous aurons pour résultat $(x-x)\sqrt{a^2}$, c'est-à-dire qu'alors le cosinus s'évanouissant, les deux faces dont il s'agit coïncident sur un même plan, en sorte que le dodécaèdre se trouve transformé en rhomboïde. Les faces du noyau hypothétique se confondent avec celles de ce rhomboïde, en sorte que le nombre de rangées soustraites désigné par N devient infini. Effective-

ment, si dans l'équation $N = \frac{x-y}{nxy-x}$ (p. 523), on substitue à n sa valeur $\frac{1}{y}$, on trouve $N = \frac{x-y}{0}$, quantité infinie. Au-delà de ce terme, le point n (fig. 111) continuant de monter, et le point λ de descendre, les lignes an, $a\lambda$ arrivent à la position horizontale. Dans ce cas $a\omega$ s'évanouit, c'est-à-dire que l'on a $2nxy - x - y = 0$ (p. 514), ce qui donne $n = \frac{x+y}{2xy}$. Si l'on met cette valeur de n dans l'équation

$$a' = a \cdot \frac{2x - y - nxy}{nxy - y},$$

celle-ci devient $a' = 3a$, ce qui doit être, parce qu'alors les lignes an, λs devenant les perpendiculaires sur l'axe, dans le noyau hypothétique, il en résulte que les parties de cet axe situées l'une en dessus et l'autre en dessous de ces perpendiculaires sont égales à as ou à l'axe du générateur.

164. Si n continue de diminuer, les arêtes an, λs se renversent pour s'incliner en sens contraire de la position qu'elles ont dans la figure, tandis que les arêtes sn, $s\lambda$ restent inclinées dans le même sens. C'est à un certain terme, compris dans ces variations, que le noyau hypothétique [illegible] semblable au générateur, ainsi qu'on le voi[illegible] 3). [illegible] ce cas, comme dans tous les autres [illegible] γ, $s\gamma$ qui répondent à an, sn [illegible] de satisfaire à la condition qu[illegible]

confondent avec les angles solides du noyau hypothétique. C'est ce que nous allons vérifier à l'aide du calcul.

Le quadrilatère $\zeta\gamma\upsilon\pi$ (fig. 113) étant la coupe principale du noyau hypothétique, et *adsg* celle du générateur, menons $\gamma\varphi$ perpendiculaire sur l'axe $\zeta\upsilon$, et qui aura pour expression $\sqrt{\frac{4}{3}g'^2}$. Soient $d\nu$ et $g\vartheta$ les lignes qui, dans le cas présent, répondent à celles que désignent les mêmes lettres (fig. 107). Par les points a, ν menons la ligne indéfinie $a\nu$, et désignons par γ' le point, quel qu'il soit, où elle rencontre la perpendiculaire $\gamma\varphi$. Il s'agit de prouver que

$$\gamma'\varphi = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}.$$

Puisque le noyau hypothétique est semblable au véritable, nous aurons

$$p'^2 = p^2 = \tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x-y-nxy}{nxy+x+y}\right) + \tfrac{1}{3}g^2,$$

et

$$9p^2 - 3g^2 = a^2 \cdot \left(\frac{2x-y-nxy}{nxy+x+y}\right)^2.$$

Or, $$9p^2 - 3g^2 = a^2.$$

Donc $$\frac{2x-y-nxy}{nxy+x+y} = 1;$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{x-2y}{2xy}.$$

i l'on met le dernier membre à la place de n, dans : équations qui donnent les valeurs de $d\nu$ (p. 511),

$g\vartheta$ (p. 512), g' et a' (p. 522), elles deviennent:

$$ds=\left(\frac{2x+2y}{x-2y}\right)\sqrt{g^2+p^2},\ g\vartheta=\frac{2x\cdot 2p}{3x-2y},\ g'=g\cdot\frac{3x}{x-2y}$$

et $$a'=a\cdot\frac{3x}{x-4y}.$$

Menons $\nu\xi$ perpendiculaire sur $\zeta\nu$, nous aurons

$$a\xi : \nu\xi :: a\varphi : \gamma'\varphi.$$

Cherchons successivement $\nu\xi$, $a\xi$ et $a\varphi$.

1°. $rs : ds :: \nu\xi : dr$.

$$rs=\sqrt{g^2+p^2}+\frac{2x+2y}{x-2y}\sqrt{g^2+p^2}=\frac{3x}{x-2y}\sqrt{g^2+p^2}$$

donc la proportion devient

$$\frac{3x}{x-2y}\sqrt{g^2+p^2} : 1 :: \nu\xi : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

donc $$\nu\xi=\frac{3x}{x-2y}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

2°. $a\xi=s\xi-as$.

$$s\xi : rs :: \nu\xi : dr,\ \text{ou}\ s\xi : \tfrac{1}{3}a :: \frac{3x}{x-2y}\sqrt{\tfrac{4}{3}} : \sqrt{\tfrac{4g^2}{3}}$$

donc $$s\xi=\frac{ax}{x-2y};$$

donc $$a\xi=\frac{ax}{x-2y}-a=\frac{2ay}{x-2y}.$$

3°. $$a\varphi=a\zeta-\varphi\zeta=\tfrac{1}{2}a'-\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{3}a'=\frac{a'-3a}{6};$$

donc la proportion $a\xi : \nu\xi :: a\varphi : \gamma'\varphi$ devient

$$\frac{2ay}{x-2y} : \frac{3x}{x-2y}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \frac{a'-3a}{6} : \gamma'\varphi;$$

ce qui donne

$$\gamma'\varphi = \frac{a'-3a}{12 \cdot ay} \times 3x\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Et mettant à la place de a' sa valeur $a \cdot \frac{3x}{x-4y}$,

$$\gamma'\varphi = \frac{3x}{x-4y}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Mais $$g' = g \cdot \frac{3x}{x-4y},$$

ou $$\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} \cdot \frac{3x}{x-4y};$$

donc $$\gamma'\varphi = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}.$$

Donc les points γ' et γ se confondant, la ligne $a\nu$ prolongée passe par l'angle solide γ du noyau hypothétique.

Maintenant dn, prolongement de ad, étant l'analogue de $g\vartheta$; il faut encore prouver que si, par les points s, n, on mène une ligne indéfinie, laquelle répond à l'arête sn (fig. 111), le point γ'' (fig. 113), quel qu'il soit, où elle rencontrera la ligne $\gamma\varphi$, se confondra avec les points γ', γ; ou, ce qui revient au même, il faut prouver que la ligne indéfinie menée par les points a, ϑ, et qui répond à $a\lambda$ (fig. 107), va couper la perpendiculaire $\pi\sigma$ (fig. 113) sur l'axe du noyau hypothétique, en un point π' qui se confond avec le point π, en sorte que l'on aura

$$\pi'\sigma = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}.$$

... menons $\vartheta\pi$ perpendiculaire sur l'axe as,
... $a\pi : \vartheta\pi :: a\sigma : \pi'\sigma$.

... successivement $\vartheta\pi$, $a\pi$ et $a\sigma$.

$$... g : s\vartheta = sg + g\vartheta :: gu : \vartheta\pi,$$

e...

$$... + \frac{2y}{3x-2y} :: \sqrt{\tfrac{3}{4}g^2} : \vartheta\pi = \frac{3x}{3x-2y}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

$$... = as - s\pi, \quad sg : s\vartheta = sg + g\vartheta :: su : s\pi.$$

Ch...

$$... : 1 + \frac{2y}{3x-2y} :: \tfrac{2}{3}a : s\pi = \frac{2ax}{3x-2y};$$

$rs=$ ...

$$... = a - \frac{2x}{3x-2y} \cdot a = a\left(\frac{x-2y}{3x-2y}\right).$$

donc

$$... = au - \sigma u,$$

$$... = su + as = \tfrac{1}{2}a' - \tfrac{1}{2}a + a = \frac{a'+a}{2};$$

donc

2°. ... $$a\sigma = \frac{a'+a}{2} - \tfrac{1}{3}a' = \frac{a'+3a}{6};$$

$s\xi : rs :$ ... portion $a\pi : \vartheta\pi :: a\sigma : \pi'\sigma$ devient

$$\frac{3x}{...-2y}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \frac{a'+3a}{6} : \pi'\sigma = \frac{3x}{a(x-2y)}\sqrt{\tfrac{4}{3}...}$$

donc

$$\times \frac{a'+3a}{6}.$$

donc ... lace de a' sa valeur $a \cdot \frac{3x}{x-4y}$,

3°. $a\varphi$ ... $\frac{3x}{x-4y}\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}$,

donc la p... $\pi\sigma$ ou $\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}$. Donc les

$\frac{2a}{x-...}$

165. Je n'ai rencontré jusqu'ici aucun exemple d'un décroissement intermédiaire sur A. Mais pour avoir une application au moins hypothétique des résultats précédens, choisissons d'abord le cas où $a\omega$ est plus grande que ωs, et faisons $g=\sqrt{3}$, $p=\sqrt{2}$, $a=\sqrt{9}$, comme dans le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, et $x=5$, $y=1$, $n=3$.

Dans le cas où le solide secondaire que je supposerai être représenté par la figure 104, tourne ses faces les plus inclinées vers les rhombes du générateur, on trouvera $g' : p' :: \sqrt{47} : \sqrt{53}$, ce qui donne pour les angles plans du rhomboïde hypothétique $118^d\ 2'\ 4''$, et $61^d\ 57'\ 56''$. On aura, dans la même hypothèse, $N=\frac{5}{2}$ et $n'=\frac{3}{5}$. Le rapport entre le sinus et le cosinus de la moitié de l'angle qui mesure la plus grande inclinaison des faces du dodécaèdre sera celui de $\sqrt{195} : \sqrt{4}$, d'où il suit que l'angle dont il s'agit est de $163^d\ 41'\ 54''$. Le rapport analogue, pour la plus petite inclinaison, sera celui de $\sqrt{174}$ à 5, et l'on aura pour cette inclinaison $138^d\ 28'\ 54''$.

Dans le cas de la double pyramide droite hexaèdre, on trouvera $n=\frac{9}{5}$.

Si l'on suppose ensuite que $a\omega$ soit plus petite que ωs, ou, ce qui revient au même, que le dodécaèdre tourne ses faces les moins inclinées vers les faces du générateur, et si, en continuant de faire

$$g=\sqrt{3},\ a=3,\ x=5,\ y=1,$$

on désigne n par la fraction $\frac{6}{5}$, on trouvera

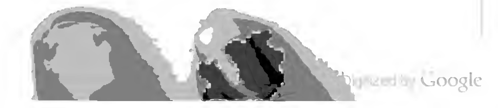
$$g' : p' :: \sqrt{48} : \sqrt{17},$$

et pour les angles du rhombe qui dépend de ce rapport, $118^d\,29'\,4''$, et $61^d\,30'\,56''$; pour N le nombre 4, et pour n' la fraction $\frac{1}{5}$, sur quoi il est à remarquer que le rhomboïde produit par le décroissement inverse que désigne cette fraction est semblable à celui qui résulterait d'un décroissement direct par deux rangées sur l'angle A du générateur; car la formule $n = \frac{2-n'}{4n'+1}$ (p. 319) donne, dans ce cas,

$$n = \frac{2-\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}+1} = 1.$$

Le rapport entre le sinus et le cosinus de l'angle qui mesure la plus grande inclinaison des faces du dodécaèdre secondaire sera celui de $\sqrt{219} : 1$, ce qui donne pour cette inclinaison $172^d\,16'\,6''$, et le rapport correspondant, pour la plus petite inclinaison, sera celui de $\sqrt{51}$ à 2, d'où l'on conclura que cette dernière inclinaison est de $148^d\,42'\,34''$.

J'ai choisi le rapport 5 à 1 pour celui de x à y, parce qu'il donne des quantités positives pour l'axe du noyau hypothétique et pour les autres lignes qu'il s'agit d'évaluer, lorsque l'on veut pousser les applications du calcul jusqu'aux résultats de pure curiosité dont j'ai parlé (p. 525 et suiv.). Ainsi, dans le cas où le noyau hypothétique devient semblable au gé-



nérateur, comme on le voit (fig. 113), on trouve

$$dv \text{ ou } \frac{2x+2y}{x-2y}\sqrt{g^2+p^2}=4\sqrt{5},\ g\vartheta,\ \text{ou } \frac{2y\cdot 2p}{3x-2y}=\tfrac{2}{13}\sqrt{8},$$

$$g' \text{ ou } g\cdot\frac{3x}{x-4y}=15\sqrt{3},\ \text{et } a' \text{ ou } a\cdot\frac{3x}{x-4y}=15\times 3.$$

Si l'on fait $x=4, y=1$, on trouve $dv=5\sqrt{g^2+p^2}$,

$$g\vartheta=\tfrac{1}{5}\cdot 2p,\ \text{et } a'=a\cdot\frac{12}{0},$$

c'est-à-dire qu'alors l'axe du noyau hypothétique devient infini. En voici la raison. Nous avons, dans le cas présent, $ad : dv :: 2p : 5\sqrt{g^2+p^2}$, et

$$g\vartheta : ag :: \tfrac{1}{5}\cdot 2p : \sqrt{g^2+p^2} :: 2p : 5\sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc les triangles *adv*, *ϑga* étant semblables, les lignes *aπ'*, *aγ'* d'une part, et *sγ'*, *sπ'* de l'autre, coïncident sur une même direction, d'où il suit que *aγ'* devenant parallèle à *sγ'* et *aπ'* à *sπ'*, les points de concours de ces lignes, ou, ce qui revient au même, les angles *γ*, *π* du noyau hypothétique sont censés être à une distance infinie de l'axe *as*. Donc l'axe *ζυ* devient lui-même une quantité infinie.

166. Je terminerai la théorie des décroissemens intermédiaires relatifs au rhomboïde, par la solution d'un problème analogue à celui qui nous a occupés pages 416 et suivantes. Dans ce dernier, j'ai supposé un dodécaèdre produit par un décroissement quelconque sur les bords inférieurs d'un rhomboïde pris pour générateur, et j'ai prouvé que l'on pouvait con-

sidérer dans ce dodécaèdre plusieurs noyaux hypothétiques, dont chacun était également susceptible de lui donner naissance. Mais les décroissemens qui se rapportaient à ces divers noyaux étaient de ceux qui ont lieu, d'après les lois ordinaires, soit sur les bords B ou D, soit sur les angles E, A ou *e*. Le problème dont il s'agit ici est d'une beaucoup plus grande généralité, en ce que l'on peut assigner aux faces du rhomboïde hypothétique une infinité de positions, dans chacune desquelles la loi qui en fait dépendre le dodécaèdre est du nombre des lois intermédiaires.

Voici donc l'énoncé du problème : Etant donné le rapport $g:p$ entre les demi-diagonales d'un rhomboïde considéré comme générateur, l'exposant N du décroissement qui produit un dodécaèdre, en agissant sur les bords D du générateur, et le rapport $g':p'$ entre les demi-diagonales d'un noyau hypothétique quelconque qui soit seulement une forme secondaire relativement au générateur, prouver qu'au défaut d'une loi ordinaire il y en aura toujours une intermédiaire susceptible de produire le dodécaèdre, comme forme secondaire dérivée du noyau hypothétique, et déterminer les quantités x, y et n, dont les deux premières représentent les nombres de molécules soustraites sur l'angle du noyau hypothétique, auquel se rapporte le décroissement, et la troisième le nombre de rangées soustraites, en vertu du même décroissement.

167. Soient *bsh*, *gsh* (fig. 115), deux faces du dodécaèdre limitées par un plan horizontal *bhg*, et par un plan vertical *bsg*. Supposons d'abord que *hs* soit une des arêtes les plus saillantes. Soit *uht* la section de la face du noyau hypothétique, laquelle est tournée vers *hs*. Il est facile de concevoir que, dans le cas présent, le dodécaèdre est censé résulter d'un décroissement sur les angles E du noyau hypothétique, de manière que x est dans le sens de D, et y dans le sens de B. Mais nous verrons que les formules auxquelles on parvient s'appliquent également soit au cas où x serait dans le sens de B, soit à celui où le décroissement agirait sur un autre angle A ou *e*.

Concevons que *bh*, *ho* soient deux perpendiculaires sur l'axe du dodécaèdre, puis menons *bg*, *tu*, ensuite *sc* perpendiculaire sur *bg*, et *hz* à la rencontre de *tu* et de *sc*.

Soit $bo = m \,.\, ho$, m étant une quantité que nous déterminerons bientôt. L'angle *boc* étant de 60ᵈ, on aura

$$oc = \tfrac{1}{2} bo = \tfrac{1}{2} m \,.\, ho,$$

$$bc = \sqrt{(bo)^2 - (oc)^2} = \sqrt{m^2 \,.\, (ho)^2 - \tfrac{1}{4} m^2 \,.\, (ho)^2}$$
$$= m \,.\, ho \sqrt{\tfrac{3}{4}},$$

$$ch = ho - oc = ho - \tfrac{1}{2} m \,.\, ho = \frac{2-m}{2} \,.\, ho;$$

donc $$ho = \frac{2 \,.\, ch}{2-m}.$$

Mettant cette valeur à la place de *ho* dans l'équa-

tion $bc = m \,.\, ho \,.\, \sqrt{\tfrac{3}{4}}$, on aura

$$bc = \frac{ch \,.\, m}{2 - m} \sqrt{3}.$$

Supposons que cz représente le tiers de l'axe du noyau hypothétique ; nous aurons

$$cz = \tfrac{1}{3} a' \quad \text{et} \quad ch = \sqrt{\tfrac{1}{3} g'^2}.$$

Soit $sz = ra'$, r étant une quantité que nous déterminerons plus bas : nous aurons

$$cs = \tfrac{1}{3} a' + ra'.$$

Or, les triangles semblables suz, sbc donnent

$$sz : sc :: uz : bc, \text{ ou } ra' : \frac{a' + 3ra'}{3} :: uz : g' \,.\, \frac{m}{2 - m};$$

d'où l'on tire

$$uz = \frac{3r \,.\, g'm}{(3r + 1)(2 - m)}.$$

D'une autre part, il est évident qu'à cause de $ch = \sqrt{\tfrac{1}{3} g'^2}$, on a

$$hz = p';$$

donc

$$hz : uz :: p' : \frac{3r \,.\, g'm}{(3r + 1)(2 - m)} :: (3r + 1)(2 - m)p' : 3r \,.\, g'm.$$

168. Soit $amnh$ (fig. 116) le rhombe dont le triangle uht (fig. 115) fait partie. Nous aurons

$$ah \text{ (fig. 116) } : au :: x : y.$$

Soit $ah = x$, $au = y$; hz renferme autant de diago-



nales obliques de molécule qu'il y a d'arêtes de molécule contenues dans $ah+au$, et uz répond à autant de diagonales horizontales de molécule qu'il y a d'arêtes de molécule comprises dans .... $um=am-au=ah-au$. Donc

$$hz : uz :: (x+y)p' : (x-y)g' ;$$

donc

$$x+y : x-y :: (3r+1)(2-m) : 3r . m.$$

Mais $x : y$ comme la somme des quantités $x+y$ et $x-y$ est à leur différence; donc nous aurons aussi

$$x:y::(3r+1)(2-m)+3r.m:(3r+1)(2-m)-3r.m$$
$$:: 6r-m+2 : 6r-m+2-6mr.$$

Or, la quantité m, qui exprime le rapport entre bo et ho (fig. 115) est évidemment une quantité rationnelle, puisque ces deux lignes sont en rapport commensurable avec la diagonale g; d'une autre part, le noyau hypothétique étant une des formes secondaires dérivées du générateur, son axe a' est en rapport commensurable avec l'axe a du générateur, et par conséquent la quantité r qui exprime le rapport entre sz et a' est aussi une quantité rationnelle; donc le rapport entre x et y sera toujours lui-même un rapport rationnel. Dailleurs on a

$$n=\frac{Ny+x+y}{Nxy} \text{(p. 449)},$$

expression dans laquelle tout est rationnel. Donc, il y aura toujours une loi admissible de décroissement, en vertu de laquelle le dodécaèdre pourra être produit par le générateur.

169. Déterminons maintenant r et m.

1°. Pour r. Soit $adsg$ (fig. 117) la coupe principale du générateur, et dp, du, pg, gu, quatre arêtes du dodécaèdre, situées dans le même plan que $adsg$. Nous aurons

$$gn : np :: ch(\text{fig. } 115) : sc :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \frac{a'}{3}(3r+1)$$

$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : an+ap = \tfrac{1}{3}a + \frac{1}{N-1} \cdot a = \frac{N+2}{3N-3} \cdot a.$$

D'où l'on tire

$$g' : a'(3r+1) :: 2g : \frac{N+2}{N-1} \cdot a, \text{ et } r = \frac{N+2}{2(3N-3)} \cdot \frac{ag'}{ga'} - \tfrac{1}{3}.$$

2°. Pour m. Ayant prolongé gn (fig. 117) jusqu'à la rencontre de dp, nous aurons

$$gn : kn :: ho(\text{fig. } 115) : bo :: ho : m \,.\, ho :: 1 : m.$$

D'une autre part,

$$gn : kn\,(\text{fig. } 117) :: dr : kn :: pr : pn :: \tfrac{2}{3}a + \frac{1}{N-1} \cdot a$$

$$: \tfrac{1}{3}a + \frac{1}{N-1} \cdot a :: 2N+1 : N+2;$$

donc

$$1 : m :: 2N+1 : N+2,$$

ce qui donne

$$m = \frac{N+2}{2N+1}.$$

170. Supposons maintenant que *hs* (fig. 115) soit une des arêtes les moins saillantes. On aura toujours

$$x : y :: 6r - m + 2 : 6r - m + 2 - 6mr.$$

Mais dans le calcul relatif à la détermination de *r*, nous aurons au lieu de $gn : np$ (fig. 117) $:: ch : sc$ (fig. 115),

$$dr : pr \text{(fig. 117)} :: ch : sc \text{(fig. 115)} :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{a'}{3}(3r+1)$$

$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : ar + ap \text{(fig. 117)} = \tfrac{1}{3}a + \frac{1}{N-1} . a = \frac{2N+1}{3N-3}.$$

Donc

$$g' : a'(3r+1) :: 2g : \frac{2N+1}{N-1};$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{2N+1}{2(3N-3)} . \frac{ag'}{ga'} - \tfrac{1}{3};$$

quantité qui ne diffère de la première que par la substitution de $2N+1$ à $N+2$ dans le numérateur du premier terme

D'une autre part, dans le calcul relatif à la détermination de *m*, nous aurons $dr : r\pi$ ou au prolongement de *dr* jusqu'à la rencontre de celui de *pg*

$$:: ho \text{ (fig. 115)} : bo;$$

ou

$$gn : r\pi :: ho : bo \text{ (fig. 115)} \; ho : m . ho :: 1 : m.$$

D'une autre part,

$$gn : r\pi \text{ (fig. 117)} :: pn : pr :: \tfrac{1}{3}a + \frac{1}{N-1} . a : \tfrac{2}{3}a + \frac{1}{N-1} . a$$

$$:: N+2 : 2N+1;$$

donc

$$1 : m :: N + 2 : 2N + 1 ;$$

d'où l'on tire

$$m = \frac{2N + 1}{N + 2},$$

quantité qui est le renversement de la première.

171. Les formules précédentes se rapportent immédiatement, ainsi que je l'ai dit, aux décroissemens intermédiaires sur E, dans lesquels x coïncide avec D et y avec B. Mais elles ont cet avantage, que quand on y a substitué, à la place de a, g, a', g', N, leurs valeurs numériques, elles font connaître si elles continuent de s'appliquer à l'espèce de décroissement dont je viens de parler, ou si c'est un autre décroissement qui est le sujet du problème, et de plus elles indiquent ce décroissement. Tout ce qui regarde ces diverses applications dont elles sont susceptibles est renfermé dans les quatre règles suivantes, qui se déduisent des changemens que subissent x et y dans le passage des formules relatives aux décroissemens sur E, dans lesquels x coïncide avec D, à celles qui concernent les autres décroissemens. Pour plus grande simplicité, je représenterai par le rapport de s à t celui des quantités numériques qui répondent à

$$6r - m + 2 \text{ et } 6r - m + 2 - 6mr,$$

en sorte que, par l'hypothèse, on aura en général,

$$x : y :: s : t.$$



1°. Si s est plus grande que t, et si l'une et l'autre sont positives, le décroissement aura lieu sur E, x étant dans le sens de D, et il n'y aura aucun changement à faire au rapport de s à t.

2°. Si s est plus petite que t, auquel cas l'une et l'autre seront encore positives, le décroissement aura lieu sur E, x étant dans le sens de B, et y dans le sens de D; alors on renversera le second rapport, en faisant $x : y :: t : s$.

3°. Si t est négative, ce sera l'indice d'un décroissement sur e. Dans ce cas, on se bornera à changer le signe de t.

4°. Si s est négative, le décroissement aura lieu sur A. Alors on mettra s à la place de t, et $-t$ à la place de s, c'est-à-dire qu'au lieu de $x : y :: -s : t$, on fera $x : y :: t : s$. Je vais faire quelques applications relatives à ces différens cas.

172. Supposons d'abord que le générateur étant le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, et le dodécaèdre étant le résultat du décroissement $\overset{3}{D}$, on prenne pour noyau hypothétique un rhomboïde semblable à la chaux carbonatée équiaxe, et que l'on demande la loi du décroissement intermédiaire en vertu de laquelle ce noyau produirait le dodécaèdre, avec la condition que les arêtes les plus saillantes de ce dernier fussent tournées vers les faces du même noyau.

Nous aurons $g = \sqrt{3}$, $a = 3$, $N = 3$, $g' = \sqrt{12}$, $a' = 3$.

Par conséquent

$$r = \frac{N+2}{2(3N-3)} \cdot \frac{ag'}{ga'} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{6} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2},$$

et
$$m = \frac{N+2}{2N+1} = \tfrac{5}{7}.$$

Donc

$$x : y :: 6r + 2 - m : 6r + 2 - m - 6mr :: 2 : 1;$$

donc le décroissement a lieu sur les angles E, x étant dans le sens de D, et y dans le sens de B. De plus,

$$n = \frac{Nv + x + y}{Nxy} = 1;$$

donc il a lieu par une rangée de molécules doubles.

Il existe une variété de chaux carbonatée que j'ai nommée *isométrique*, et qui est représentée fig. 118, dans laquelle les faces λ, λ qui appartiennent au décroissement $\overset{3}{D}$ se combinent avec les faces g, g, du noyau hypothétique, en sorte que ces dernières, qui sont dominantes, impriment au cristal l'empreinte de ce noyau. Ainsi le signe est $\underset{\lambda}{\overset{3}{D}}\,\underset{g}{\overset{1}{B}}$.

Si l'on cherche, à l'aide des formules ordinaires, les incidences respectives des faces du dodécaèdre, on trouvera pour celle de λ sur λ, ou de λ' sur λ', $155^d\,44'\,29''$, et pour celle de λ sur λ'', $101^d\,52'\,26''$. Il sera de même facile de déterminer celle de g sur λ ou sur λ', laquelle est de $134^d\,49'\,54''$.

173. Imaginons que les choses restant d'ailleurs





dans le même état, la seule différence consiste en ce que le noyau hypothétique soit placé de manière que ses faces correspondent aux arêtes les moins saillantes du dodécaèdre. Dans cette hypothèse, on aura

$$r = \frac{2N+1}{2(3N-3)}\frac{ag'}{ga'} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6};\ m = \frac{2N+1}{N+2} = \frac{7}{5};$$

et

$$x : y :: 6r+2-m : 6r+2-m-6mr :: 4 : -1;$$

ce qui indique un décroissement sur l'angle e.

On fera donc $x=4$, $y=1$. Mais $N=3$. Donc la formule $n=\frac{Nx-Ny-y}{xy}$ (p. 498) deviendra $n=2$. On pourra vérifier ce résultat, en supposant que le rhomboïde équiaxe fasse la fonction de générateur, et en cherchant dans cette hypothèse le rapport entre les demi-diagonales g' et p' du noyau hypothétique. Faisant donc $g=\sqrt{12}$, $a=3$, $n=2$, $x=4$, $y=1$, on aura (p. 497)

$$g' : p' :: g : \sqrt{\frac{\frac{1}{9}a^2(nxy-x+2y)^2}{nxy-x-y}} :: \sqrt{12} : \sqrt{8} :: \sqrt{3} : \sqrt{2},$$

ainsi que cela doit être, puisque c'est le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée qui est censé faire la fonction de noyau hypothétique.

176. Prenons pour générateur un rhomboïde dans lequel on aurait $g=\sqrt{48}$, $p=\sqrt{17}$, ce qui donne $a=3$. Supposons de plus $N=4$, et proposons-nous de déterminer la loi en vertu de laquelle

le dodécaèdre serait produit par le rhomboïde de $104^{d}\frac{1}{2}$, considéré de nouveau comme noyau hypothétique. Nous aurons $g' = \sqrt{3}$, et $a' = 3$. Choisissons le cas où les arêtes les plus saillantes du dodécaèdre seraient tournées vers les faces du noyau dont nous venons de parler.

Dans cette supposition,

$$r = \frac{N+2}{2(3N-3)} \cdot \frac{ag'}{ga'} - \tfrac{1}{3} = -\tfrac{1}{4}; \quad \text{et} \quad m = \frac{N+2}{2N+1} = \tfrac{1}{3}.$$

D'après cela, on trouve par la formule ci-dessus (p. 537) $x : y :: -1 : 5$, ce qui indique un décroissement sur A. Ainsi il faudra faire $x : y :: 5 : 1$. La formule relative à n (p. 523) donnera

$$n = \frac{Nx + x - y}{Nxy} = \tfrac{6}{5}.$$

Ces résultats ne sont autre chose qu'une inversion de ceux qui ont été exposés (p. 532), et dans lesquels le rhomboïde de $104^{d}\frac{1}{2}$ a été pris pour générateur, tandis que celui qui a ses demi-diagonales dans le rapport de $\sqrt{48}$ à $\sqrt{17}$ a fait la fonction de noyau hypothétique.

177. Pour faire une nouvelle application, choisissons le dodécaèdre résultant du prolongement des faces λ, λ (fig. 118), qui appartiennent à la chaux carbonatée isométrique (p. 542). Ce dodécaèdre est représenté séparément (fig. 119). Si nous prenons pour noyau hypothétique le rhomboïde inverse de

la même substance, et si nous lui donnons sa position naturelle, relativement au générateur, il est facile de voir que ses faces seront tournées vers les arêtes les plus saillantes, telles que ε, du dodécaèdre.

Cela posé, nous aurons $g=\sqrt{3}$, $a=3$, $N=3$, $g'=\sqrt{3}$, $a'=6$; donc

$$r=\frac{N+2}{2(3N-3)}\cdot\frac{ag'}{ga'}-\tfrac{1}{3}=-\tfrac{1}{8}, \text{ et } m=\frac{N+2}{2N+1}=\tfrac{5}{7}.$$

Donc la proportion $x:y::6r-m+2:6r-m+2-6mr$ deviendra $x:y::1:2$, d'où l'on conclura que le décroissement intermédiaire agit sur les angles E du rhomboïde inverse, de manière que x coïncide avec B, et y avec D. Faisant donc $x=2, y=1$, nous aurons

$$n=\frac{Nx+x+y}{Nxy}\ (\text{p. } 485)=\tfrac{3}{2}.$$

178. Tout restant d'ailleurs dans le même état, substituons au dodécaèdre qui résulte du décroissement $\overset{3}{\mathrm{D}}$, le métastatique dont le signe est $\overset{2}{\mathrm{D}}$, auquel cas nous aurons $N=2$.

Dans cette hypothèse, on trouve

$$r \text{ ou } \frac{N+2}{2(3N-3)}\cdot\frac{ag'}{ga'}-\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}=0,$$

ce qui fait connaître que, dans ce cas, on a aussi

$$sz\ (\text{fig. } 115)=0;$$

d'où il suit que le point z se confond avec le sommet s, et que la diagonale du noyau hypothétique est pa-

rallèle à l'arête hs. Si l'on fait $r=0$, dans le rapport de x à y, on aura $x:y::2-m:2-m$, ou $x=y$, d'où l'on conclura que le décroissement qui donne le dodécaèdre est du nombre des décroissemens ordinaires sur les angles E. Pour avoir n, on peut choisir à volonté entre la formule $n=\frac{Ny+x+y}{Nxy}$ (p. 449), relative au cas où x est dans le sens de D, et la formule $n=\frac{Nx+x+y}{Nxy}$ (p. 485), qui se rapporte au cas où x est dans le sens de B. L'une et l'autre donneront $n=2$.

Nous avons présenté plus haut le même problème, sous une autre forme (p. 430), en cherchant la loi en vertu de laquelle le dodécaèdre métastatique serait produit par un noyau hypothétique dont les faces seraient parallèles aux arêtes les plus saillantes de ce dodécaèdre. Nous avons eu alors pour la valeur de n l'unité, c'est-à-dire une quantité sous-double de celle que nous venons de trouver, parce que n désignait le nombre des diagonales soustraites, au lieu qu'ici il indique le nombre de rangées soustraites.

179. Les résultats précédens peuvent être employés avec avantage pour faciliter et simplifier la détermination des formes qui dépendent des décroissemens intermédiaires. Supposons, par exemple, qu'ayant observé la [illegible]x carbonatée numérique (fig. 81), on ait r[illegible]ue l[illegible]mboïde dont elle porte l'emprein[illegible]i [illegible]ux carbo-

natée équiaxe, ce qui est d'autant plus aisé que l'on peut mesurer immédiatement les incidences des faces de ce rhomboïde. On cherchera la loi de décroissement en vertu de laquelle le dodécaèdre auquel appartiennent les faces y, y, serait produit par le rhomboïde dont il s'agit. Cette loi, comme nous l'avons vu, a pour exposant $\frac{5}{3}$. On considérera ensuite le même rhomboïde comme étant le générateur, et le rhomboïde primitif comme étant le noyau hypothétique, et appliquant ici les formules qui donnent le rapport entre x et y (p. 539), et les valeurs de m et de r, dans le cas où le dodécaèdre tourne ses arêtes les plus saillantes vers les faces du noyau hypothétique, on fera $g=\sqrt{12}$, $a=3$, $N=\frac{5}{3}$, $g'=\sqrt{3}$, $a'=3$, ce qui donnera $r=\frac{1}{8}$, $m=\frac{11}{13}$, et $x:y::3:2$. Mettant à la place de N, x et y, leurs valeurs numériques, dans la formule $n=\frac{Ny+x+y}{Nxy}$, on trouvera $n=\frac{5}{6}$, et l'on sera ainsi parvenu par une méthode indirecte, mais expéditive, à un résultat qui aurait pu exiger de longs tâtonnemens, si l'on avait cherché immédiatement la loi du décroissement intermédiaire.

De diverses formes secondaires dérivées du rhomboïde.

Parmi les nombreuses variétés de formes originaires du rhomboïde, que nous offre la cristallisation, surtout dans l'espèce de la chaux carbonatée, j'ai choisi, pour les résultats que j'avais à exposer,

celles qui m'ont paru se prêter le mieux aux applications de la théorie dont ces résultats ont été les sujets. Je vais en décrire encore quelques-unes qui n'ont point trouvé place dans les articles précédens, et que je crois dignes de l'attention des géomètres.

180. La première, qui appartient à la chaux carbonatée, porte le nom d'*analogique*, à cause des propriétés qui mettent en rapport ses différentes parties, soit entre elles, soit avec d'autres formes remarquables par leur symétrie, comme celles qui offrent des angles droits, ou des angles de 60 degrés. Les figures 121 et 122 représentent cette variété dont le signe rapporté au noyau (fig. 120) est $\underset{c}{\overset{2}{e}}\,\underset{r}{\overset{2}{D}}\,\underset{\overset{1}{g}}{B}$. Sa limite géométrique est celle que montre la fig. 121, où toutes les faces sont des quadrilatères; mais il arrive assez souvent que les unes prennent respectivement plus d'étendue que les autres, d'où résultent diverses modifications accidentelles; dans celle que l'on voit (fig. 122) le cristal est censé avoir subi, dans le sens de son axe, un allongement qui change les trapézoïdes c, c' (fig. 121) en hexagones.

Les différentes faces qui composent la surface de cette variété sont situées si avantageusement, que la connaissance acquis[illegible] [illegible]leurs des angles que forment entre elles ce[illegible] mêm[illegible] [illegible]tre, suffirait pour vérifier les lois [illegible]nd [illegible] [illegible]u cristal. Mais en faisant abst[illegible] [illegible]cett[illegible] [illegible]ance, je me prop[illegible] [illegible]e déterm[illegible] [illegible]bor[illegible] [illegible]s plans

du cristal ramené à sa limite, et ensuite les incidences des faces d'un ordre sur celles de l'ordre voisin.

Soit *criz* (fig. 123) une des faces verticales *c* (fig. 121), *cγpr*, *cεsz* (fig. 123) deux des faces *r* (fig. 121) qui appartiennent au cristal métastatique, et *γcεm* (fig. 123) une des faces *g* de l'équiaxe. Soient de plus *dof*, *qof*, *duf*, *quf* (fig. 123) quatre faces du cristal métastatique supposé complet. Menons l'axe *ou*, les deux diagonales *ci*, *rz* du trapézoïde *criz*, la grande diagonale *γr* du trapézoïde *cγpr*, et les deux *cμ*, *γε* du trapézoïde *γcεμ*.

Commençons par *criz*. Les points *r*, *z* étant situés au milieu des arêtes *df*, *qf*, qui sont communes au cristal métastatique et au noyau, il est évident que $rz = g = \sqrt{3}$.

Donc $rh = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Soit *h* (fig. 124) le même point que figure 123. Si nous menons *hc* parallèle à l'axe, cette ligne sera aussi la même que figure 123. Or, le point *h* (fig. 124) est situé au $\frac{1}{4}$ de la diagonale oblique *ft*; donc $fh = \frac{1}{2}p$. Mais $fh : ft :: hc : to$. De plus $to = 2a = 6$; donc la proportion devient

$$\tfrac{1}{2} : 2 :: hc : 6\,;$$

donc $hc = \frac{3}{2}$; donc (fig. 123) $rh : hc :: \sqrt{\frac{3}{4}} : \frac{3}{2} :: 1 : \sqrt{3}$; donc le triangle *rcz* est équilatéral.

D'une autre part, *hi* (fig. 124) est égale à la même ligne (fig. 123), et en comparant les triangles semblables *fhi*, *ftu*, on en conclura que $hi = \frac{1}{4}tu = \frac{3}{4}$; donc *hi* (fig. 123) $= \frac{1}{2}hc$. D'après ces données on

aura [illegible] = [illegible] ou [illegible] = 100^d 53' 3'',
[illegible] = [illegible].

Déterminons, en second lieu, le trapézoïde [illegible]. Soient [illegible] les mêmes lignes que figure [illegible], par le point [illegible] qui est le même que figure [illegible], menons [illegible] prolongée indéfiniment. Cette ligne est évidemment dans le plan [illegible] (fig. [illegible]), ou, ce qui revient au même, dans [illegible] donc elle passe par le milieu de la diagonale qui va de [illegible] en [illegible]. Soit [illegible] ce point milieu. Menons [illegible] perpendiculaires sur l'axe, puis [illegible] perpendiculaire sur [illegible]. Il est aisé de faire voir que [illegible] = [illegible].

Les triangles semblables [illegible] donnent

[illegible]

Donc on aura [illegible] = [illegible]. Il est prouvé que [illegible]. Cherchons successivement les valeurs de [illegible].

1°. Pour [illegible] [illegible]

[illegible]

Pour avoir [illegible] observons que la ligne [illegible] étant demi-perpendiculaire sur l'axe par [illegible] des rhombes inférieurs ou moyens, sa position est la même que [illegible] (fig. [illegible]) [illegible]

[illegible] (fig. [illegible]) = [illegible] (fig. [illegible]) [illegible]



[illegible] On conclura [illegible]

De plus, $\vartheta\varphi$ (fig. 125) $=\sqrt{\frac{1}{3}g^2}=1$. Maintenant, es triangles semblables $o\sigma\lambda$, $o\varphi\vartheta$ donnent

$$o\sigma : \sigma\lambda :: o\varphi : \varphi\vartheta :: 5 : 1.$$

Reste à chercher $o\sigma$. Si du point c (fig. 124) nous menons une perpendiculaire sur l'axe, elle tombera à l'extrémité a de cet axe. Car $cf=\frac{1}{4}of$; donc, puisque ca est parallèle à fr, la distance ar sera $\frac{1}{4}$ de or. Donc $ar=\frac{1}{3}ao$, d'où il suit que l'extrémité a de la perpendiculaire se confond avec celle de l'axe du noyau. Donc, puisque la ligne $c\sigma$ (fig. 125) correspond à ca (fig. 124), le point σ (fig. 125) est tellement situé, que $o\sigma$ est l'excès de l'axe du métastatique sur celui du noyau; donc $o\sigma=3$; donc la proportion $o\sigma : \sigma\lambda :: 5 : 1$ devient $3 : \sigma\lambda :: 5 : 1$; donc $\sigma\lambda=\frac{3}{5}$.

Cherchons maintenant $c\sigma$ ou son égale ac (fig. 124). $or : fr :: ao : ac$, ou $4 : 2 :: 3 : ac=\frac{3}{2}=c\sigma$; donc l'équation $c\lambda=c\sigma-\sigma\lambda$ devient $c\lambda=\frac{3}{2}-\frac{3}{5}=\frac{9}{10}$.

Reste à chercher $\lambda\tau$. Les triangles $c\tau\zeta$ et $c\sigma\mu$ donnent $c\tau : \tau\zeta :: c\sigma : \sigma\mu$, ou $c\lambda+\lambda\tau : \tau\zeta :: c\sigma : \sigma\mu$. Or, d'une part, $\tau\zeta=5\lambda\tau$, parce que ces quantités sont proportionnelles à $o\sigma=3$ et $\sigma\lambda=\frac{3}{5}$.

D'une autre part, appelant g' et p' les deux demi-diagonales de l'équiaxe, on a

$$c\sigma : \sigma\mu :: \sqrt{\frac{1}{3}g'} : \frac{1}{3}\sqrt{9p'^2-3g'^2} :: \sqrt{\frac{1}{3}.12} : \frac{1}{3}\sqrt{9.5-3.12}$$
$$:: \sqrt{4} : \sqrt{1} :: 2 : 1.$$



Enfin, $c\lambda = \frac{9}{10}$; donc la proportion $c\lambda + \lambda\tau : \tau\zeta :: c\sigma :$ devient $\frac{9}{10} + \lambda\tau : 5\lambda\tau :: 2 : 1$; d'où l'on tire $\lambda\tau =$

Donc, substituant à la place de $c\lambda$ et de $\lambda\tau$ les valeurs dans l'équation $c\tau = c\lambda + \lambda\tau$, on aura

$$c\tau = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = 1.$$

2°. Pour $\tau\sigma$.

$$\tau\sigma = c\sigma - c\lambda - \lambda\tau = \frac{3}{2} - \frac{9}{10} - \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Donc $c\tau = 2\tau\sigma$; donc aussi $c\zeta = 2\zeta\mu$, ce qu'il fa prouver. Maintenant, puisque

$$\zeta\mu \text{ (fig. 123)} : \gamma\zeta :: \sqrt{5} : \sqrt{12},$$

nous aurons

$$c\zeta : \gamma\zeta :: \sqrt{20} : \sqrt{12} :: \sqrt{5} : \sqrt{3},$$

ce qui est précisément le rapport entre les demi-diagonales du rhomboïde inverse. Ainsi deux triangles $\epsilon\mu\gamma$, $\epsilon c\gamma$, l'un appartient à l'éq et l'autre à l'inverse; et les deux hauteurs $c\zeta$, ces triangles ont entre elles le même rapport qu hauteurs ch, ih des triangles qui composent l pézoïde $ircz$.

Passons au trapézoïde $c\gamma pr$, et cherchons d' les expressions des trois côtés du triangle $c\gamma r$.

1°. Pour $c\gamma$.

$$c\gamma = \sqrt{(c\zeta)^2 \ldots \zeta)^2}; \; c\zeta \text{ (fig. 125)} = \sqrt{(c\tau)^2 +}$$
$$= \sqrt{(c\tau) \ldots} = \sqrt{\ldots + \frac{25}{100}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} =$$

De plus,

$$\gamma\zeta \ldots 23) : \ldots \sqrt{5} \ldots \sqrt{\tfrac{5}{4}} :: \sqrt{3} :$$

Donc $\gamma\zeta = \sqrt{\frac{3}{4}}$; donc $c\gamma = \sqrt{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{2}$.

2°. Pour cr.

$$cr = \sqrt{(ch)^2 + (hr)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$$

3°. Pour γr. Si l'on fait passer par la ligne $\gamma\varepsilon$ un plan perpendiculaire à l'axe, ce plan coupera l'axe au point ν (fig. 125.) Cherchons la valeur de $o\nu$. Nous avons

$$o\nu = o\sigma - \sigma\nu = o\sigma - \tau\zeta = o\sigma - 5\lambda\tau = 3 - \frac{5}{10} = \frac{5}{2}.$$

Or, l'axe $ou = 9 = \frac{18}{2}$. Donc le point γ (fig. 123) qui est à la hauteur du point ν (fig. 125) se trouve situé vis-à-vis les $\frac{5}{18}$ de l'axe. Mais le point d (fig. 123 et 124) est situé vis-à-vis les $\frac{5}{9}$ de l'axe, puisque... $og = 5$; donc le point γ (fig. 123) est au milieu de l'arête od. Mais le point r est au milieu de l'arête df. Donc

$$\gamma r = \tfrac{1}{2} of = \tfrac{1}{2}\sqrt{(or)^2 + (fr)^2}\ \text{(fig. 48)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{16+4} = \sqrt{5}.$$

D'ailleurs, $cr = \sqrt{3}$ et $c\gamma = \sqrt{2}$. Concluons de là : 1°. que l'angle γcr est droit; 2°. que le triangle $c\gamma r$ est semblable et égal au quart d'une des faces du noyau divisée par les deux diagonales.

Ayant déjà l'angle γcr de 90^d, cherchons encore les angles γpr et $c\gamma p$.

1°. Pour l'angle γpr. Cet angle est le supplément de dpr. Or, dans le triangle rpd, nous connaissons $dr = \frac{1}{2} df = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. De plus,

$$pr = ir = \sqrt{(rh)^2 + (ih)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{10}} = \frac{1}{4}\sqrt{21}.$$

Donc

$$dr : pr :: \sqrt{20} : \sqrt{21}.$$

Enfin, l'angle *pdr*, qui appartient à l'une des faces du cristal métastatique est censé connu, et sa valeur est de $54^d\,27'\,30''$. D'après ces données, on trouve que $dpr = 52^d\,34'\,7''$, d'où il suit que $\gamma pr = 127^d\,25'\,53''$.

2°. Pour l'angle $c\gamma p$. Cet angle est composé des deux angles $c\gamma r$ et $p\gamma r$, dont le premier est la moitié de l'angle obtus du rhombe primitif, c'est-à-dire qu'il est de $50^d\,46'\,6''$. Reste à trouver $p\gamma r$, ce qui sera facile d'après la connoissance de $\gamma pr = 127^d\,25'\,53''$, de $pr = \frac{1}{4}\sqrt{21}$, et de $\gamma r = \sqrt{5}$. On aura $p\gamma r = 24^d\,0'\,24''$: laquelle valeur ajoutée à celle de $c\gamma r$, donne $74^d\,46'\,30''$ pour l'angle $c\gamma p$. Le quatrième angle *crp* sera donc de $67^d\,47'\,37''$.

Nous avons encore à déterminer l'incidence de $c\gamma pr$ sur *czir*, et celle de $c\gamma\mu\varepsilon$ sur *cpr*.

1°. Pour l'incidence de $c\gamma pr$ sur *czir*.

Soit *rcz* (fig. 126) le même triangle que fig. 123. Menons *cn* (fig. 126) située comme *cf* (fig. 123), et tellement prolongée, que les lignes *rn*, *zn* menées à son extrémité soient perpendiculaires sur elle. Menons aussi *ch*, hauteur du triangle *rcz*, ensuite *nh*, puis *ng* perpendiculaire sur *cr*, *na* perpendiculaire sur *ch*, et enfin *ag* [illegible]e *nga* qui mesure l'incidence de *ncr* sur *cr*[illegible] suppl[illegible]t de celui qui mesure l'incidence [illegible] des [illegible]*riz*, $c\gamma pr$ (fig. 123). [illegible]roblè[illegible]it d[illegible]echerche

de l'angle *nga* (fig. 126). Déterminons successivement *ng* et *na*.

1°. Pour *na*. A cause du triangle rectangle *cnh*,

$$na = \frac{cn \times hn}{ch}.$$

$ch = \sqrt{\frac{9}{4}}$. $rh : hn :: \sqrt{5} : \sqrt{3}$, parce que l'angle *nrz* mesure la plus petite incidence des faces du cristal métastatique. Mais $rh = \sqrt{\frac{3}{4}}$; donc

$$hn = \sqrt{\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{5}} = \sqrt{\tfrac{9}{20}};\ cn = \sqrt{(ch)^2 - (hn)^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{20}} = \sqrt{\tfrac{9}{5}}.$$

Donc

$$na = \frac{\sqrt{\frac{9}{5} \times \frac{9}{20}}}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \sqrt{\tfrac{9}{25}}.$$

2°. Pour *ng*. $ng = \frac{cn \times nr}{cr}$.

Nous avons déjà $cn = \sqrt{\frac{9}{5}}$;

$$nr = \sqrt{(rh)^2 + (hn)^2} = \sqrt{\tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{20}} = \sqrt{\tfrac{6}{5}};$$
$$cr = \sqrt{(ch)^2 + (rh)^2} = \sqrt{\tfrac{9}{4} + \tfrac{3}{4}} = \sqrt{3};$$

donc

$$ng = \frac{\sqrt{\frac{9}{5} \times \frac{6}{5}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{18}{25}}.$$

Donc $ng : na :: \sqrt{18} : \sqrt{9} :: \sqrt{2} : 1$. D'où il suit que $nga = 45^d$; et par conséquent l'incidence de *cypr* sur *czir* est de 135^d.

2°. Pour l'incidence de *cyμε* (fig. 123) sur *cypr*. Soit *γcε* (fig. 127) le même triangle que fig. 123.

Menons $c\nu$ (fig. 127) située comme co (fig. 123) et limitée dans sa longueur, de manière que les droites $\gamma\nu$, $\varepsilon\nu$ (fig. 127) menées à son extrémité soient perpendiculaires sur elle. Menons aussi $\nu\zeta$ perpendiculaire sur $\gamma\varepsilon$, $\nu\lambda$ perpendiculaire sur $c\zeta$, $\nu\pi$ perpendiculaire sur $c\zeta$, et enfin $\lambda\pi$. L'angle $o\lambda\pi$ sera le supplément de celui qui mesure l'incidence proposée. Cherchons successivement $\nu\lambda$ et $\nu\pi$.

1°. Pour $\nu\lambda$. $\nu\lambda = \frac{c\nu \times \gamma\nu}{c\gamma}$.

Nous avons trouvé plus haut $c\gamma = \sqrt{2}$. Mais

$$c\nu = \sqrt{(c\zeta)^2 - (\zeta\nu)^2};$$

et nous avons eu aussi $c\zeta = \sqrt{\frac{5}{4}}$; de plus, $\gamma\zeta = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Or,

$$\gamma\zeta : \zeta\nu :: \sqrt{5} : \sqrt{3}.$$

Donc $\zeta\nu = \sqrt{\frac{9}{20}}$; donc $c\nu = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{9}{20}} = \sqrt{\frac{16}{20}} = \sqrt{\frac{4}{5}}$.

$$\gamma\nu = \sqrt{(\gamma\zeta)^2 + (\zeta\nu)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{20}} = \sqrt{\frac{6}{5}};$$

donc

$$\nu\lambda = \frac{\sqrt{\frac{4}{5} \times \frac{6}{5}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{12}{25}}.$$

2°. Pour $\nu\pi$

$$\nu\pi = \frac{c\nu \times \zeta\nu}{c\zeta},\ c\nu = \sqrt{\frac{4}{5}},\ \zeta\nu = \sqrt{\frac{9}{20}},\ c\zeta = \sqrt{\frac{5}{4}};$$

donc

$$\nu\pi = \sqrt{\frac{\frac{4}{5} \times \frac{9}{20}}{\frac{5}{4}}} = \sqrt{\frac{36}{25.5}};$$

donc

$$\nu\lambda : \nu\pi :: \sqrt{\frac{12}{25}} : \sqrt{\frac{36}{25.5}} :: \sqrt{5} : \sqrt{3};$$



ce qui est le rapport entre le côté du rhombe primitif et la moitié de la diagonale horizontale. Donc l'angle $\nu\lambda\pi = \frac{101^d 32' 13''}{2} = 50^d 56' 6''$; d'où il suit que l'incidence de $c\gamma\mu\iota$ (fig. 123) sur $c\gamma pr$ est de $129^d 13' 54''$.

181. Une seconde variété qui est représentée figure 128, et dont le signe est $\overset{2}{\underset{c}{e}}\overset{3}{\underset{m}{e}}\overset{4}{\underset{n}{D}}$, a été appelée *ascendante*, parce que les trois lois dont elle dépend suivent la marche indiquée par ce nom, en partant des angles et des bords inférieurs du générateur (1). Voici les mesures de ses angles saillans. Incidence de c sur c', 120^d; de c sur m, ou de c' sur m', $165^d 51' 49''$; de m sur m', $114^d 18' 56''$; de n sur n, $161^d 48' 18''$; de n sur la face de retour, $101^d 32' 13''$.

Cette dernière incidence est égale à l'angle au sommet du rhombe primitif. Je vais prouver que cette égalité peut avoir lieu relativement à tous les rhomboïdes obtus dans lesquels les carrés des expressions des demi-diagonales sont des quantités rationnelles, quelles que soient d'ailleurs les mesures de leurs angles, en sorte que la loi qui la donne dépend, pour chaque rhomboïde, du rapport entre les diagonales dont il s'agit.

Il est d'abord facile de voir que le sinus de la moitié de l'incidence égale à l'angle du rhombe pri-

(1) J'ai déjà indiqué, p. 340, celle de ces lois qui donne les faces n, n.

mitif étant alors au cosinus comme $g : p$, et leur rapport étant le même que celui de *de* (p. 324) ou de g à ek, on aura l'équation

$$ek, \text{ ou } \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{4}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{36}g^2}} = p;$$

d'où l'on tire, en mettant à la place de a^2 sa valeur $9p^2 - 3g^2$, et en faisant les opérations convenables,

$$n^2 + n\left(\frac{4p^4 - 4g^2p^2}{g^4 - 2g^2 + p^2 + p^4}\right) + \frac{4p^4}{g^4 - 2g^2p^2 + p^4} = 0;$$

ou en simplifiant,

$$n^2 - \frac{n \cdot 4p^2}{g^2 - p^2} + \frac{4p^4}{g^4 - 2g^2p^2 + p^4} = 0.$$

Extrayant la racine du premier membre, on a

$$n - \frac{2p^2}{g^2 - p^2} = 0,$$

ce qui donne

$$n = \frac{2p^2}{g^2 - p^2}.$$

182. Il y a une manière beaucoup plus simple de démontrer la même propriété. Elle est fondée sur l'observation que quand la plus petite incidence de deux faces du dodécaèdre, telles que *dpf*, *gpf* (fig. 17, pl. 16), est égale à l'angle *dfq* du générateur, la ligne *dk* perpendiculaire sur *pf* prolongée se confond avec l'arête *df*, puisque l'on a $ek = p = ef$. Il en résulte que les angles *dfp*, *gfp* sont droits, et

par conséquent les triangles *dpf*, *qpf* sont perpendiculaires sur le plan du rhombe *dfqs*.

Soit toujours *amhl* (fig 19) la coupe transversale du générateur, prise par un plan perpendiculaire aux arêtes *ab*, *df* (fig 17). La ligne *mt* (fig. 19) étant perpendiculaire sur le prolongement de *la*, coïncidera avec la face *dpf* (fig. 17) du dodécaèdre. Soit *mou* (fig. 19) le triangle mensurateur, *d* la dimension qui sur la molécule répond à *am*, et *n* le nombre de rangées soustraites. La ligne *at* étant le cosinus du petit angle du rhombe primitif, nous aurons

$$om : ou :: d \times n : d :: am : at :: 2p^2 : g^2 - p^2 \text{ (p. 392)},$$

ou

$$n : 1 :: 2p^2 : g^2 - p^2;$$

donc

$$n = \frac{2p^2}{g^2 - p^2}.$$

Ainsi la valeur de *n* est égale au rapport qui représente la valeur du cosinus du petit angle du rhombe primitif. Nous avons déjà vu que les valeurs correspondantes relativement à d'autres formules qui généralisent la propriété du dodécaèdre métastatique (p. 330) et du rhomboïde inverse (p. 399), dépendaient du même rapport, en sorte que celui-ci sert à lier toutes ces propriétés doublement intéressantes, soit en elles-mêmes, soit par leur réunion autour d'un point commun de ralliement.

183. Si l'on fait $g=\sqrt{3}$, $p=\sqrt{2}$, on trouve $n=4$, comme dans la variété qui est le sujet de cet article.

Si l'on suppose $g=\sqrt{5}$, $p=\sqrt{3}$, comme dans l'argent antimonié sulfuré, on aura $n=3$.

En faisant $g=\sqrt{2}$, $p=\sqrt{1}$, on trouverait $n=2$, ce qui a lieu, comme nous le verrons dans la suite, dans une variété du dodécaèdre rhomboïdal, c'est-à-dire d'une forme primitive dont la théorie peut être ramenée à celle du rhomboïde.

Lorsque g est égale à p, comme dans le cube, on a $n=\frac{2}{0}$, c'est-à-dire qu'alors n devient infinie, en sorte que le dodécaèdre se confond avec le générateur. Passé cette limite, le générateur devenant un rhomboïde aigu, on a $n=-\frac{2p^2}{p^2-g^2}$, c'est-à-dire qu'alors la valeur de n devient négative.

184. La figure 129 représente une autre variété de chaux carbonatée dont le signe est $\overset{2}{\underset{c}{e}}\overset{1}{\underset{u}{D}}\underset{\psi}{(E^{\frac{4}{7}}D^{7}B^{2})}\overset{\frac{5}{7}}{\underset{7}{e}}\underset{\overset{3}{t}}{B}$.

Je lui ai donné le nom d'*imitative*, parce que les faces ψ et n, dont l'une résulte d'un décroissement intermédiaire, et l'autre d'un décroissement mixte, ont été produites, pour ainsi dire, à l'imitation de celles qui, dans d'autres variétés, sont dues à [illegible] différentes et en même temps plus simples.

Les premières, si elles étaient prol[illegible] s'entrecouper, composeraient la surf[illegible]



caèdre semblable à celui auquel appartiennent les faces y, y (fig. 130) de la variété dïennéaèdre, lesquelles dépendent du décroissement $\overset{\frac{3}{2}}{D}$.

Pour démontrer la relation qui existe entre les deux décroissemens, supposons que *pu* (fig. 130) représente le dodécaèdre dont il s'agit. Il est évident que, dans l'hypothèse du décroissement $\overset{\frac{3}{2}}{D}$, le générateur tournera ses faces vers les arêtes les moins saillantes, telles que γ. Mais dans le dodécaèdre qui résulterait du prolongement des faces ψ, ψ (fig. 129), ce seraient au contraire les arêtes les plus saillantes, telles que ε (fig. 130), qui répondraient aux faces du génerateur (1). Ainsi la question se réduit à chercher la loi de décroissement intermédiaire en vertu de laquelle le générateur, considéré comme noyau hypothétique, produirait le dodécaèdre, avec la condition que les arêtes ε fussent tournées vers les faces de ce noyau.

En appliquant ici les formules que nous avons données ci-dessus (p. 538), nous aurons

$$a=3,\ g=\sqrt{3},\ N=\tfrac{3}{2},\ a'=3, g'=\sqrt{3},$$

ce qui donnera

$$r=\tfrac{5}{6},\ m=\tfrac{7}{8},\ \text{et}\ x:y::7:2.$$

(1) Dans le cas présent, ces arêtes sont celles qui naissent de l'intersection des faces ψ, ψ, situées en avant.

On trouvera ensuite $n = \frac{4}{7}$, résultats qui s'accordent avec les indications du signe du cristal.

D'une autre part, les pentagones *n*, *n*, ayant leurs grands côtés sensiblement parallèles entre eux, il est facile de voir que dans le rhomboïde qui résulte de leur prolongement, les diagonales obliques sont parallèles aux arêtes les moins saillantes du dodécaèdre auquel appartiennent les faces ψ, ψ′. Cherchons d'abord le rapport entre les demi-diagonales g' et p' du rhomboïde dont il s'agit.

Soit toujours *adsg* (fig. 16, pl. 16) la coupe du générateur, et *dp* une des arêtes les moins saillantes du dodécaèdre. Nous avons, dans le cas présent,

$$ap \text{ ou } \frac{1}{N-1} \cdot a = \frac{3}{\frac{3}{2}-1} = 6;$$

donc $$pr = 8.$$

Mais $$dr : pr :: 2 : 8 :: 1 : 4;$$

donc $$g' : \sqrt{3p'^2 - g'^2} :: 1 : 4,$$

ou $$g'^2 : 3p'^2 - g'^2 :: 1 : 16;$$

d'où l'on tire

$$g' : p' :: \sqrt{17} : \sqrt{3},$$

ce qui indique que le rhomboïde est le contrastant (p. 378).

Or, le dodécaèdre étant placé à contre-sens de celui que … e la fig. … , ses arêtes les moins

saillantes, et par conséquent les faces du rhomboïde sont tournées vers les bords supérieurs du véritable générateur, d'où il suit que le rhomboïde est produit par renversement sur les angles inférieurs de ce générateur, et que la loi qui le donne a pour exposant $\frac{7}{10}$, comme je l'ai démontré (p. 378). Ainsi le décroissement a lieu par 7 rangées en largeur et par 5 en hauteur, comme l'indique le signe. J'ajouterai ici les mesures des principaux angles du cristal. Incidence de *c* sur *c*, 120^{d}; de *c* sur *u*, 150^{d}; de $\downarrow$ sur $\downarrow$, 108^{d} 56′ 2″; de $\downarrow$ sur $\downarrow'$, 134^{d} 25′ 2″; de *n* sur *n*, 65^{d} 41′ 4″; de *n* sur $\downarrow$, 157^{d} 12′ 31″; de *t′* sur *t′*, 137^{d} 39′ 26″; de *t* sur *t′*, 159^{d} 11′ 34″.

185. La variété qui va maintenant nous occuper appartient au fer oligiste. La fig. 131 la représente, et son signe rapporté au noyau (fig. 132) est......

$\overset{1}{D}PE^{33}EE^{11}EA.$ Je la nomme *fer oligiste soustractif*,
k P *n* *u* $\overset{2}{s}$

parce que l'exposant 3 de la loi qui donne les faces *n* est moindre d'une unité que la somme 4 des autres exposans. En examinant son signe, on concevra que sa surface est composée de six faces verticales *k*, *k*, situées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier; de douze autres faces *n*, *n*, *n′*, *n′*, qui étant prises six à six et prolongées jusqu'à se rencontrer par leurs parties supérieures, formeraient deux pyramides droites dont les bases se confondraient avec celles du prisme; de six pentagones P, P, parallèles aux faces du noyau, de six autres *s*, *s*, placés trois

à trois aux extrémités du cristal, et enfin de six quadrilatères *u* qui interceptent les angles solides à la rencontre des faces *k* et *n*. J'ai à prouver que ces dernières facettes sont des rhombes, et que leur figure symétrique peut avoir lieu dans une infinité de cas, sous une condition qui diffère de celle à laquelle est soumise la même figure dans la variété euthétique de chaux carbonatée (p. 505). Voici en quoi elle consiste :

Soient *bxqz* (fig. 133), *qztl*, etc., six faces verticales analogues aux pans d'un prisme hexaèdre régulier, et *pbzy* une pyramide droite qui repose sur la base de ce prisme ; soit de plus *drsk* un quadrilatère qui remplace l'angle solide *t*, et qui ait ses deux bords supérieurs *dr*, *dk*, parallèles aux arêtes *pz*, *py*, de la pyramide. Ce quadrilatère sera un rhombe, quelles que soient les inclinaisons des faces de la pyramide sur la base.

Pour le prouver, je mène le rayon oblique *ct* de la base, ensuite *zy*, et je prolonge le plan *zpy*, jusqu'à ce que ses deux sections sur les pans *ztlq*, *ytlu*, se rencontrent en un point *n* de l'arête *tl*. Il est évident que les quadrilatères *drsk*, *pzny*, sont semblables ; il suffit donc de démontrer que le dernier est un rhombe. Si l'on mène *pg* à l'endroit [illegible] *ct* s'entrecoupent, et qu'on la prolonge indéfi[illegible] 'le passe[illegible] r le point *n*, puisqu'elle reste [illegible] ireme[illegible] plan du [illegible] 'rilatère *pzny* [illegible] ivisera [illegible] partie[illegible] *pyn*. Or [illegible] gles *g*[illegible]

sont évidemment semblables; mais de plus $cg=gt$, parce que la base du prisme est un hexagone régulier; donc les deux triangles sont non-seulement semblables, mais égaux; donc $gp=gn$; d'où il suit que le quadrilatère *pzny* est un rhombe, et ainsi du quadrilatère *drsk*.

Or, les bords supérieurs des facettes *u* (fig. 131) étant parallèles aux arêtes que remplacent les faces P, ou, ce qui est la même chose, aux plus longs bords de ces dernières faces, et cela par une suite de ce qu'elles proviennent du décroissement $E^{1}E$, il en résulte que ces facettes sont aussi des rhombes, et l'on juge aisément que cette figure ne dépend point du rapport entre les diagonales du générateur, mais qu'elle tient uniquement à une combinaison de lois de décroissement d'où résulte le parallélisme dont j'ai parlé. Voici les principaux angles du cristal :

Incidence de *k* sur *k*, 120^{d}; de *k* sur *n*, $150^{d}\ 26'$; de *n* sur *n*, $128^{d}\ 28'$; de *n* sur *n'*, $120^{d}\ 52'$; de P sur *n*, $154^{d}\ 13'$; de P sur *s*, $144^{d}\ 8'$; de *s* sur *s*, 144^{d}; de P sur *u*, $128^{d}\ 39'$.

186. Je n'ajouterai plus qu'une variété que je choisis dans l'espèce du fer sulfaté, non qu'elle offre des propriétés remarquables, mais parce que les décroissemens dont elle dépend agissent à la fois sur ses différentes parties, et ont toutes une même mesure, ce qui est très rare dans les solides dérivés d'un noyau rhomboïdal, qui n'ayant pas un caractère particulier de régularité, comme le cube et l'octaèdre

à triangles équilatéraux, n'exige pas que les lois qui produisent ses formes secondaires participent de sa symétrie.

Le rhomboïde primitif P (fig. 134) du fer sulfaté, qui est aigu, a ses diagonales g et p dans le rapport de $\sqrt{7}$ à $\sqrt{10}$. La forme secondaire dont il s'agit est représentée figure 135, et a pour signe $\underset{P}{P}\,\underset{s}{\dot{D}}\,\underset{o}{E^{1}}\,\underset{\acute{r}}{{}^{1}E}\,\underset{\dot{n}}{BA}$,
d'où l'on voit que les décroissemens qui lui donnent naissance ont lieu par une simple rangée sur tous les angles du rhomboïde primitif. Je nomme cette variété *fer sulfuré pantogène*, c'est-à-dire *qui tire son origine de toutes les parties de son noyau*. Voici les mesures de ses angles.

Incidence de P sur P, 81^{d}23′; de P sur n, 118^{d}54′; de P sur o, 123^{d}24′; de P′ sur o, 135^{d}48′; de P sur r, 130^{d}41′; de P ou P′ sur s, 139^{d}18′.

Je n'ai point parlé de la tourmaline dont la forme primitive est aussi un rhomboïde, et qui offre plusieurs variétés intéressantes, parce que cette substance est du nombre des corps naturels qui s'électrisent par la chaleur, et dont la description fera le sujet d'un article particulier.

Formule pour la détermination des angles des formes composées.

187. J'ai donné des formules générales pour déterminer immédiatement les incidences mutuelles

des faces qui appartiennent aux formes secondaires simples, produites en vertu d'un seul décroissement par un nombre quelconque de rangées soustraites sur tel bord ou tel angle d'un rhomboïde primitif.

Les surfaces des formes que j'appelle *composées* étant des assemblages de facettes de différens ordres, qui se rencontrent et s'entrecoupent dans différentes directions, la complication qui en résulte semble d'abord écarter l'idée d'étendre à ces formes les avantages qui naissent des formules générales, relativement à la détermination des premières. Il ne reste plus alors que des méthodes particulières, qui ne conduisent au but proposé qu'à travers les détails prolixes d'une opération que l'on est obligé de recommencer tout entière, chaque fois qu'il survient un nouveau problème à résoudre. Ce n'est que depuis peu de temps que j'ai conçu l'idée de généraliser, autant qu'il serait possible, les applications de la théorie à la recherche des angles des formes secondaires composées, et les résultats de mon travail, que je vais exposer, m'ont fait regretter que cette idée ne se soit pas offerte dès le commencement.

Les angles dont il s'agit sont produits par le concours tantôt de deux faces situées sur deux rhomboïdes différens, tantôt d'une face de rhomboïde et d'une autre face qui appartient à un dodécaèdre, tantôt enfin d'une face située soit sur un rhomboïde, soit sur un dodécaèdre, et d'une seconde qui est perpendiculaire ou parallèle à l'axe.

La détermination du premier de ces angles souffre peu de difficulté. C'est vers celle des deux autres angles que j'ai dirigé mes recherches, et je suis parvenu à circonscrire les différens cas auxquels elle se rapporte (1) dans une même formule, qui s'applique directement à l'un d'eux, et n'a besoin que d'être plus ou moins légèrement modifiée, pour donner tout d'un coup la solution du problème dont chacun des autres offre le sujet. Elle m'a même paru mériter d'autant plus d'être publiée, qu'indépendamment de l'avantage qu'elle a d'apporter une économie de temps et de travail dans les applications de la théorie, elle peut être employée au développement de plusieurs propriétés remarquables, que réalisent une partie des formes dont j'ai parlé, et que je ferai bientôt connaître.

188. Mais avant d'exposer cette formule il est nécessaire d'entrer dans quelques détails sur les différens cas auxquels elle peut s'appliquer, et sur les quantités qui m'ont fourni les données d'où je suis parti pour arriver à mon but.

La construction de cette for[illegible]épend du rapport entre trois coordonnées, [illegible] e es[illegible] perpendiculaire menée d'un des [illegible] id [illegible] ux

(1) [illegible] lus de mon plan le ca[illegible] es[illegible]
l[illegible] e face de rhomboïd[illegible] fac[illegible]
d[illegible] lèle à l'axe, parce [illegible] st [illegible]
qu[illegible] d'y employer une [illegible]

du dodécaèdre, pris à volonté, et les deux autres sont les sous-divisions de l'axe situées de part et d'autre de cette perpendiculaire. Je vais indiquer ces coordonnées relativement à chaque cas particulier.

Je supposerai d'abord que les dodécaèdres dont il s'agit aient été produits par les décroissemens ordinaires. Il pourra arriver que ces décroissemens aient eu lieu sur les bords inférieurs du rhomboïde primitif, ou sur ses bords supérieurs ou sur ses angles latéraux. Dans le premier cas on voit, par la seule inspection de la fig. 16, pl. 16, dont nous avons déjà fait usage pour la théorie de l'espèce de décroissement dont il s'agit, que les trois coordonnées sont les lignes *dr*, *pr* et *ur*, qui ont pour expression $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$,

$$\frac{2}{3}a + \frac{a}{n-1} \text{ ou } a\,\frac{(2n+1)}{3n-3}, \text{ et } \frac{1}{3}a + \frac{a}{n-1} \text{ ou } a\left(\frac{n+2}{3n-3}\right).$$

Dans le second cas, *adsg* (fig. 5, pl. 15) étant la coupe principale du générateur, et *amsp* celle qui lui correspond sur le dodécaèdre, les trois coordonnées sont *mu*, *au*, *us*, que nous avons représentées algébriquement par les expressions $\frac{n+1}{n}\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$,

$$\frac{2n-1}{3n}a, \text{ et } \frac{n+1}{8n}.$$

La figure a été tracée dans l'hypothèse où le dodé- aèd tournerait ses arêtes les moins saillantes vers 1 noyau. Alors *au* est plus grande que *us*.

Lorsqu'elle est plus petite, ce sont les arêtes les plus saillantes du dodécaèdre qui répondent aux faces du noyau. Mais il n'y a de changé que le rapport entre les expressions des coordonnées, par une suite de ce que la quantité n se trouve diminuée.

Le troisième cas exigera un calcul particulier pour mettre les expressions des coordonnées sous la forme qui convient à la formule. Dans la figure 29, pl. 17, qui est celle dont nous nous sommes servis pour les résultats relatifs aux décroissemens sur les angles latéraux, les lignes oz, px ne coïncident pas sur une même direction avec les lignes ln, dr; elles sont situées au-dessus ou au-dessous, suivant que le dodécaèdre tourne vers le noyau ses arêtes les plus saillantes, ou les moins saillantes. Cette différence de position est une suite du parallélisme qui a lieu entre to et ad. Nous n'avions besoin alors que des expressions de ln et dr. Mais ici il est nécessaire de chercher celles de oz et dr, qui sont les véritables coordonnées, prises sur la direction de l'axe.

Soit toujours $as = a$. Nous avons déjà $dr = \sqrt{\frac{4}{3}g^2}$. De plus,

$$oz : dr :: oi : di$$

ou

$$oz : \sqrt{\frac{4}{3}g^2} :: a + \frac{a}{n} : a + \frac{a}{2n}$$

donc

$$oz = \frac{2n+2}{2n+1} \sqrt{}$$



Or, d'une part,

$$tz : oz :: ar : dr :: \tfrac{2}{3} a : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

donc

$$tz = \frac{oz}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}} \times \tfrac{2}{3} a = \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \tfrac{2}{3} a.$$

D'une autre part,

$$iz : oz :: ir : dr :: \frac{2n+3}{6n} a : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

donc

$$iz = \frac{oz}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}} \times \frac{2n+3}{6n} a = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)\ 6n} a.$$

Dans la figure 29, *tn* est plus petite que *iz*, par une suite de ce que le dodécaèdre tourne ses arêtes les plus saillantes vers les faces du générateur. Si elle était plus grande par une suite du contraire, les expressions des coordonnées resteraient les mêmes : il n'y aurait de changé que leur rapport.

Si le dodécaèdre est produit par un décroissement intermédiaire, on substituera le noyau hypothétique au véritable, et l'on prendra les coordonnées dans la coupe du dodécaèdre qui naîtrait d'un décroissement sur les bords inférieurs de ce noyau hypothétique; ce qui fera rentrer le cas dont il s'agit dans le premier de ceux que nous venons de considérer.

189. Je vais maintenant donner la construction de la formule générale dans laquelle les expressions des trois coordonnées n'ont besoin que d'être remplacées dans chaque cas particulier par leurs valeurs numé-

riques pour conduire à la solution du problème proposé.

Soit $\lambda\mu$ (fig. 136) un dodécaèdre produit par un décroissement ou réel ou hypothétique sur les bords inférieurs *ah*, *bh*, etc., d'un noyau rhomboïdal, et dont les sommets soient remplacés par les faces $\gamma\epsilon\delta\lambda$, etc., et d'un rhomboïde quelconque originaire du véritable noyau. On propose de déterminer l'incidence de l'une des mêmes faces sur les faces adjacentes *r*, *r*, du dodécaèdre. Nous supposons ici que ces faces naissent sur les arêtes longitudinales les moins saillantes du même dodécaèdre.

Par les angles *a*, *b*, faisons passer un plan *asb* parallèle à l'axe, et coupons-le par un autre plan *agb* perpendiculaire au même axe. Soit *acbsg* (fig. 137) la pyramide donnée par ces plans, et *hgk* un plan parallèle à la face $\gamma\lambda\delta\epsilon$ (fig. 136). Menons *gp* prolongée convenablement, et abaissons *sr* perpendiculaire sur *gk* prolongée, puis *sz*. L'angle *szr* sera le supplément de l'incidence cherchée.

Soit *odmz* (fig. 138) la coupe du générateur, et *du*, *dt*, deux arêtes longitudinales du dodécaèdre. Les deux lignes *ku*, *kt*, seront les coordonnées dont nous avons parlé plus haut, et qui ont pour expressions générales $\frac{2}{3}a+\frac{a}{n-1}$, $\frac{1}{3}a+\frac{a}{n-1}$. Représentons-les, pour abréger, par *s* et *t*; et enfin exprimons par *m*, *b*, les deux lignes *cg*, *cp*, dont le rapport est celui de $g' : \sqrt{3p'^2-g'^2}$, g' et p' étant les



demi-diagonales du rhomboïde dont une des faces est $\gamma\lambda\delta\varepsilon$.

Cela posé, cherchons successivement sr et rz, qui sont l'une le sinus, et l'autre le cosinus de l'angle szr.

1°. Pour sr. Les triangles semblables pcg, prs, donnent $sr : pr :: cg : cp :: m : b$; donc $sr = \frac{m}{b} \times pr$. Calculons pr.

$$pr : cp :: ps, \text{ ou } cs - cp : gp;$$

donc

$$pr : b :: cs - b : \sqrt{m^2 + b^2};$$

mais

cs (fig. 137) $: cg :: ku : dk$ (fig. 138), ou $cs : m :: s : \sqrt{\frac{4}{3}g^2}$,

d'où l'on tire

$$cs = \frac{ms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}};$$

donc

$$pr : b :: \frac{ms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}} - b : \sqrt{m^2 + b^2};$$

ce qui donne

$$pr = \frac{\frac{bms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}} - b^2}{\sqrt{m^2 + b^2}}.$$

Multipliant cette valeur de pr par $\frac{m}{b}$, on a

$$sr = \frac{m(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2(m^2 + b^2)}}.$$

2°. Pour rz.

$$rz : gr :: pk : gk, \text{ d'où } rz = \frac{gr \times pk}{gk}.$$

Or,

$$gr = gp + pr = \sqrt{m^2 + b^2} + \frac{\frac{bms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}} - b^2}{\sqrt{m^2 + b^2}}$$

$$= \frac{m(m\sqrt{\frac{4}{3}g^2} + bs)}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2(m^2 + b^2)}}.$$

D'une autre part,

$$pk : cb :: ps : cs, \text{ ou } pk : g :: cs - b : cs,$$

d'où l'on tire

$$pk = g \times \left(\frac{cs - b}{cs}\right) = \frac{g(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{ms}.$$

De plus,

$$gk = \sqrt{(gp)^2 + (pk)^2} = \sqrt{m^2 + b^2 + \frac{g^2(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{m^2s^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m^2s^2(m^2 + b^2 + g^2(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{m^2s^2}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de rz, on aura

$$rz = \frac{m(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2(m^2 + b^2)}} + \frac{g(m\sqrt{\frac{4}{3}g^2} + bs)}{\sqrt{m^2s^2(m^2 + b^2) + g^2(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}}.$$

Maintenant, si nous prenons le rapport de sr à rz, simplifié par la suppression des facteurs communs aux deux quantités, nous aurons

$$sr : rz :: \sqrt{m^2s^2(m^2 + b^2) + g^2(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})} : g(m\sqrt{\frac{4}{3}g^2} + bs).$$

190. Il est aisé d'introduire dans cette formule la



seconde coordonnée t; pour cela, remarquons que le point c (fig. 137) étant situé au milieu de la diagonale oblique du noyau, cs (fig. 137) est la moitié de ap (fig. 16, pl. 16). Or,

$$ap = 2pn - un = 2t - s;\ \text{donc}\ c^2 = \frac{2t-s}{2}.$$

Mais nous avons trouvé plus haut $cs = \frac{ms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}}$; donc

$$ms = \frac{2t-s}{2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = (2t-s)\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2},$$

et

$$m^2s^2 = (2t-s)^2\tfrac{1}{3}g^2.$$

Si l'on substitue cette valeur de m^2s^2 dans la formule, celle-ci prendra la forme

$$sr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2\tfrac{1}{3}(m^2+b^2)+(ms-2b\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2})^2}$$
$$: 2m\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}+bs\ \text{(A) (1)}.$$

191. Les faces du rhomboïde, en s'inclinant dans un sens ou dans l'autre, subissent des variations qui se rapportent à certaines limites dont chacune présente sous un nouvel aspect géométrique le cristal qui s'y rapporte. Mais il est facile de conserver à la formule sa généralité, en la modifiant d'une manière assortie à ces variations.

---

(1) Pour faciliter les applications aux différens cas qui peuvent avoir lieu, je désignerai cette formule et les suivantes par les lettres A, B, C.... qui serviront de renvois.

Supposons d'abord que les trois faces situées vers chaque sommet restant fixes par leurs angles inférieurs ε (fig. 136) s'abaissent par leurs parties supérieures, en formant entre elles des angles toujours plus ouverts. Il y aura un terme où elles coïncideront sur un même plan perpendiculaire à l'axe, comme on le voit fig. 139. Alors la quantité b s'évanouit, et la formule devient

$$sr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2+3s^2} : 2g \text{ (B)}.$$

192. Concevons maintenant que les mêmes faces se relèvent par leurs parties supérieures, en faisant avec l'axe des angles toujours plus aigus. Leurs diagonales obliques finiront par coïncider avec les arêtes εh (fig. 136) du dodécaèdre, et si l'on suppose qu'ensuite elles se meuvent vers l'axe parallèlement à elles-mêmes, la forme se présentera sous l'aspect d'un dodécaèdre (fig. 140) dans lequel les arètes longitudinales les moins saillantes seraient remplacées par des hexagones f, f, dont les plus longs bords δ, δ, seraient parallèles. L'incidence de ces faces sur leurs adjacentes dans le dodécaèdre est censée être donnée d'avance, comme étant égale à la moitié de celle de r sur r, plus à 90^d. Mais si l'on voulait appliquer la formule à ce cas, on ferait attention qu'alors le rapport de m à b devient égal à celui de $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$ à s; et par la substitution de ces secondes quantités aux premières, la formule ordinaire se ré-

duirait à

$$sr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2 \tfrac{1}{3}(\tfrac{4}{3}g^2+s^2)} : 4\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2+s^2}. \quad (a).$$

193. Les faces du rhomboïde continuant de s'incliner dans le même sens, interceptent les angles latéraux du dodécaèdre, en sorte que la forme devient semblable à celle qu'on voit (fig. 141). La construction à laquelle se rapporte la figure 137 se change alors en celle que représente la figure 142, et qui ne diffère de l'autre qu'en ce que le triangle *hsk* y est situé en sens contraire de la position qu'il a dans celle-ci. Le rapport entre les deux côtés de l'angle qui donne l'incidence proposée, est alors celui de $gr : rz$ (fig. 142), et si l'on cherche ce rapport, en assimilant la marche du calcul à celle qui a été suivie à l'égard de la construction de la figure 137, on trouve

$$gr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2 \tfrac{1}{3}(m^2+b^2)+(2b\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}-ms)^2} : bs+2m\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} \quad (C);$$

lequel rapport est le même que celui qui est indiqué par la lettre (A), excepté que dans celui-ci le second membre du premier terme est $(ms-2b\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2})^2$, où il y a inversion dans les signes.

194. Au-delà du terme précédent, les faces du rhomboïde, en se relevant de plus en plus par leurs parties supérieures, arrivent au parallélisme avec l'axe, et à ce terme la forme présente l'aspect d'un

dodécaèdre dont les faces se combinent avec les pans d'un prisme hexaèdre régulier, produits en vertu du décroissement $\overset{a}{e}$ (1), ainsi qu'on le voit fig. 143. Dans ce cas m devient nul, et la formule (C) se change en la suivante :

$$gr : rz :: \sqrt{(2t - s)^2 \tfrac{1}{3} b^2 + \left(2b\sqrt{\tfrac{1}{3} g^2}\right)^2} : bs$$
$$:: \sqrt{(2t - s)^2 \tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{3} g^2} : s$$
$$:: \sqrt{(2t - s)^2 + 4g^2} : s\sqrt{3} \text{ (D).}$$

On peut remarquer que des deux triangles dont chaque trapézoïde c est l'assemblage, l'un, tel que kln, est tourné vers une face du générateur, tandis que l'autre, ksn, correspond à l'un de ses bords contigus aux sommets. Il en résulte deux incidences différentes d'un même trapézoïde sur les faces adjacentes du dodécaèdre, que l'on détermine à l'aide de la formule, en faisant successivement s plus petite et plus grande que t, ou réciproquement.

195. Il est facile, en faisant subir un léger changement aux formules précédentes, de les rendre suscep-

---

(1) J'omets le cas où les p[illegible]risme résultent du décroissement $\overset{1}{D}$, parce que l'[illegible]ont entre elles deux faces du dodécaèdre, telles [illegible]g. 139), [illegible]ées des deux cotés d'une même arête [illegible]étant ce[illegible], il [illegible]fit d'en prendre la moitié [illegible]ler 90 [illegible]ir [illegible]ence de l'une quelconq[illegible] même[illegible] [illegible]cent.

tibles d'être appliquées au cas où le dodécaèdre a pour faces des triangles isocèles ; il suffit de considérer qu'alors les quantités s et t deviennent égales, d'où il suit que, dans le premier terme, il faut mettre s à la place de $2t-s$.

196. Je vais maintenant faire des applications des quatre formules à des variétés de formes que je choisirai parmi celles qui appartiennent aux trois cas que le dodécaèdre est susceptible d'offrir.

La variété analogique de la chaux carbonatée (fig. 144) fournit deux exemples du premier cas, dont l'un concerne l'incidence des faces r du dodécaèdre sur les faces g de l'équiaxe, et l'autre celle des mêmes faces sur les pans c, c, parallèles à l'axe. Son signe rapporté au noyau que représente la figure 145 est $\underset{c}{\overset{2}{e}}\,\underset{r}{\overset{2}{\hat{D}}}\,\underset{\overset{1}{g}}{B}$.

Ici les arêtes les plus saillantes du dodécaèdre sont tournées vers les faces du rhomboïde, d'où il suit que t est plus grande que s. Nous aurons donc, d'après les expressions générales de t, s, m et b, et la formule (A),

$$t=5,\ s=4,\ m=2,\ b=1,\ g=\sqrt{3},$$

et (A)

$$sr : rz :: \sqrt{36\times5+[(8-2)\sqrt{3}]^2} : (4+4)\sqrt{3} :: \sqrt{3} : \sqrt{2},$$

ce [illegible]oit être, parce que l'incidence proposée est [illegible] moitié de l'angle obtus du rhombe primi[illegible] 90d, c'est-à-dire qu'elle est de 129d 13' 54".

L'autre exemple offre deux incidences différentes, dont l'une est celle de la face r'', et l'autre celle de la face r sur le même trapézoïde c'.

Nous aurons pour la première

$$t=5,\ s=4,\ g=\sqrt{3};$$

ce qui donne

$$(D)\ gr : rz :: \sqrt{48} : 4\sqrt{3},$$

d'où l'on conclut $gr=rz$; c'est-à-dire que l'incidence dont il s'agit est exactement de 135^d, ainsi que je l'ai annoncé en traitant de la variété dont il s'agit ici.

Pour la seconde,

$$t=4,\ s=5,\ g=\sqrt{3};$$

donc

$$gr : rz :: \sqrt{7} : 5,$$

d'où l'on conclut que l'incidence proposée est de 152^d 6′ 52″.

197. Les deux exemples suivans serc- ... du dodécaèdre auquel appartiennent les f la variété paradoxale de la même su biné avec des faces les unes f, f', obl tres c, c' parallèles à l'axe (fig. 146), faces g et f ... 147) toutes oblique dodécaèd ... duit par un décro termédiai ... omme je l'ai dit, ceux qui ... ns le premier ca



stituant le noyau hypothétique au véritable. La dernière variété, que j'appelle *articulée*, a pour signe $\left({}^{1}E{}^{1}B{}^{1}D{}^{2}\right)_{x}\overset{2}{D}_{r}\,E^{1}_{f}\,{}^{1}E_{\overset{1}{g}}B$. Celui de l'autre, qui porte le nom d'*itérative*, est $\overset{2}{e}_{c}\left({}^{1}E{}^{1}B{}^{1}D{}^{2}\right)_{x}E^{1}_{f}\,{}^{1}E$. Le noyau hypothétique étant le rhomboïde inverse dans lequel $g=\sqrt{3}$, $a=6$, et l'exposant du décroissement étant 3, l'axe du dodécaèdre sera égal à 12, et les valeurs de s et de t seront 7 et 5.

Nous avons à déterminer, dans la variété articulée (fig. 147), les incidences de f et de g sur x. Le rapport de m à b, qui est celui de 2 à 1, étant ajouté aux valeurs qui viennent d'être indiquées, la formule devient, relativement à la face g,

$$(A)\; sr : rz :: \sqrt{159} : 11,$$

d'où il suit que l'incidence est de $131^{d}\,4'\,11''$. Pour avoir celle de f sur x, nous nous servirons des mêmes expressions, excepté le rapport de m à b, qui est ici celui de 2 à 1. Nous aurons ainsi $sr : rz :: \sqrt{6} : 8$, ce qui donnera $162^{d}\,58'\,2''$ pour l'incidence cherchée.

En conservant à s et t les mêmes valeurs, nous aurons pour l'incidence de x'' sur c, dans la variété itérative (fig. 146), (D) $gr : rz :: 1 : 7$, et l'incidence sera égale à $159^{d}\,18'$. Faisant $s=5$, et $t=7$, pour ... de x sur c, nous aurons $gr : rz :: \sqrt{31} : 5$, ce ...ne $131^{d}\,34'\,8''$.

Les deux variétés que nous considérons ici offrent la réunion des faces *r*, *g*, *c*, de la variété analogique, et la manière dont ces faces se combinent avec les faces *x*, *x*, donne naissance à des rapports mutuels qui me paraissent mériter d'être remarqués. Dans l'analogique, les trapézoïdes qui remplacent les sommets du dodécaèdre sont composés de deux triangles réunis par leurs bases, dont l'un, tel que *onl* (fig. 144), qui est semblable à la moitié d'une face du rhomboïde équiaxe, entre dans l'ordre de la structure, et l'autre, tel que *ohl*, qui est semblable à la moitié d'une face du rhomboïde inverse, ne se rencontre là que par l'effet des intersections des faces *g* avec les faces *r*. Dans la variété articulée (fig. 147) les mêmes triangles qui sont aussi accolés l'un à l'autre, ont leurs positions respectives déterminées par les lois de la structure, en sorte qu'ils forment entre eux un angle de 143^d 7′ 49″.

Les triangles obtus qui font partie des faces *c* de la variété itérative (fig. 146) sont semblables à ceux qui leur correspondent sur la variété analogique, en sorte que leur base est à leur apothème dans le même rapport de $\sqrt{4}$ à $\sqrt{3}$; mais l'apothème du triangle aigu, dans la variété articulée, est à celui du triangle obtus comme 3 est à 1, au lieu que dans l'analogique il n'en est que le double. C'est une suite de ce que les apothèmes sont entre eux dans chaque dodécaèdre comme l'exposant *n* du décroissement est à l'unité.



198. Je choisirai, pour dernier exemple, un des cas où les faces du dodécaèdre sont des triangles isocèles, comme les faces ξ, ξ de la variété *synallactique* (fig. 148), qui se combinent avec celles de la variété analogique (fig. 144). Le dodécaèdre a pour signe $\left({}^{\frac{7}{5}}E D^{5} B^{1}\right)$. Son noyau hypothétique serait le prisme hexaèdre régulier, qui dépendrait des décroissemens $\overset{1}{D}\underset{1}{A}$, et aurait une hauteur égale à l'axe du véritable noyau; et le signe du dodécaèdre rapporté à ce prisme serait $\overset{\frac{1}{2}}{B}$, B représentant le côté de l'hexagone.

On trouve, à l'aide du calcul, que le rayon de la base commune des deux pyramides, dont le dodécaèdre est l'assemblage, est à l'axe de chacune d'elles dans le rapport de 1 à 3; et parce que ce rayon est égal à la ligne *dr* (fig. 1) dont l'expression est 2, on a ici $s=6$. Pour avoir maintenant l'incidence de ξ sur g, on mettra dans la formule (A) s à la place de $2t-s$, puis substituant à s sa valeur 6, à g la quantité $\sqrt{3}$, et au rapport m à b celui de 2 à 1, qui a lieu dans l'analogique, on trouvera

$$st : rz :: \sqrt{8} : \sqrt{5},$$

ce qui donne pour l'incidence cherchée, $128^{d}\ 19'\ 44''$.

Celle de ξ sur c sera tirée de la formule (D) avec les mêmes substitutions, ce qui donnera $gr : rz :: 2 : 3$, d'où l'on conclura que l'incidence est de $146^{d}\ 18'\ 37''$.

199. Je passe aux dodécaèdres compris dans le

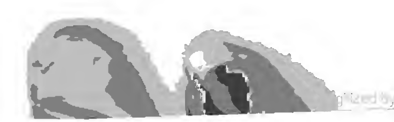
second cas, qui naissent d'un décroissement sur les bords supérieurs du générateur. Mais, avant de citer des exemples, je vais déterminer d'une manière générale le noyau hypothétique, qui est aussi susceptible de produire le dodécaèdre à l'aide d'un décroissement sur ses bords inférieurs. J'en userai de même pour les dodécaèdres qui se rapportent au troisième cas. La considération de ces noyaux, outre l'extension qu'elle donne à la théorie, a l'avantage de faire apercevoir les propriétés dont jouissent une partie des variétés auxquelles elle s'applique.

Je supposerai d'abord que *us* soit plus grande que *au*, comme on le voit (fig. 149). Soit *a* l'axe *as* du générateur, *g* sa demi-diagonale horizontale, *n* l'exposant du décroissement qui produit le dodécaèdre, en agissant sur les bords supérieurs du générateur. Les valeurs numériques de ces trois quantités sont censées être toujours connues. Soit, de plus, a' l'axe du noyau hypothétique, g' et p' les demi-diagonales de ses faces, n' l'exposant de la loi qui donne naissance au dodécaèdre en agissant sur ses bords inférieurs, et n'' l'exposant de la loi susceptible de produire le noyau hypothétique, en agissant sur l'angle supérieur du générateur.

Déterminons successivement ces cinq quantités.

1°. Pour a'. Nous avons eu plus haut $au = \frac{2n-1}{3n} . a$,

et $$us = \frac{(n+1)}{3n} a.$$



Maintenant

$$a' = 3us - 3au = \frac{2-n}{n} a.$$

2°. Pour g'. Nous avons eu $mu = \frac{n+1}{n} \sqrt{\frac{4}{3} g^2}$.

Or, la même quantité est égale à $\sqrt{\frac{4}{3} g'^2}$. Donc

$$g' = \frac{n+1}{n} g.$$

3°. Pour p'. $p' = \sqrt{\frac{1}{3} g'^2 + \frac{1}{9} a'^2}$.

4°. Pour n'. La partie de l'axe du générateur qui excède de chaque côté l'axe du noyau hypothétique, et qui a pour expression $\frac{a'}{n'-1}$, est $\frac{a-a'}{2}$.

Or $\quad a - a' = a - \frac{(2-n)}{n} a = 2a \frac{(n-1)}{n}$;

donc

$$a \frac{(n-1)}{n} = \frac{a-a'}{2} = \frac{a'}{n'-1},$$

d'où l'on tire

$$n' = \frac{an + a'n - a}{an - a}.$$

5°. Pour n''.

$$mu : au :: \frac{n''+1}{n''} \sqrt{\frac{4}{3} g^2} : \frac{2n''-1}{3n''} . a :: \sqrt{\frac{1}{3} g'^2} : \frac{1}{3} a';$$

$$2(n''+1) g : (2n''-1) a :: g' : a',$$

d'où l'on conclut

$$2(n''+1) a' g = (2n''-1) a g',$$

et

$$2n'' a' g + 2a' g = 2n'' a g' - a g'.$$

On tire de cette équation

$$n'' = \frac{2a'g + ag'}{2ag' - 2a'g}.$$

200. Supposons maintenant au plus grande que us, ainsi qu'on le voit figure 5, pl. 15.

Nous aurons, 1°. pour a',

$$a' = 3au - 3us = \frac{3n-6}{3n}a = \frac{n-2}{n}.a.$$

2°. g' aura encore pour expression $\frac{n+1}{n}g$.

3°. Celle de p' sera de même $\sqrt{\frac{1}{3}g'^2 + \frac{1}{9}a'^2}$.

4°. Pour n'.

$$\frac{a'}{n'-1} = \frac{a-a'}{2}. \text{ Or, } a - a' = a - \frac{(n-2)}{n}.a = \frac{2a}{n};$$

donc

$$\frac{a'}{n'-1} = \frac{a}{n} \text{ et } a'n = an' - a, \text{ d'où } n' = \frac{a'n+a}{a}.$$

5°. Pour n''. Son expression sera toujours $\frac{2a'g+ag'}{2ag'-2a'g}$.

201. C'est encore la cristallisation de la chaux carbonatée qui m'a offert les deux variétés que je vais citer comme exemples de dodécaèdres compris dans le cas que nous considérons ici. Les faces qui se combinent dans l'une et l'autre avec celles de ces dodécaèdres sont situées parallèlement à l'axe du générateur.

La première, qui est représentée (fig. 150), et



qui porte le nom de *bisadditive*, a pour signe $\underset{\frac{3}{2}}{\overset{}{B}}\overset{2}{e}$ $\begin{smallmatrix}7 & c\end{smallmatrix}$. Le dodécaèdre qui en fait partie tourne ses arêtes les plus saillantes, telles que *d*, vers les faces du générateur.

Supposant $a=9$, d'où il suit que $g=\sqrt{27}$, et $p=\sqrt{18}$, et déterminant les autres quantités d'après les valeurs algébriques trouvées plus haut, nous aurons, pour l'axe du noyau hypothétique, $a'=3$; pour ses demi-diagonales, $g'=\sqrt{75}$, $p'=\sqrt{26}$; pour l'exposant de la loi qui produit le dodécaèdre en agissant sur les bords inférieurs du noyau hypothétique, $n'=2$; et pour l'exposant de la loi qui donne naissance au noyau hypothétique en agissant sur les angles supérieurs du générateur, $n''=\frac{7}{8}$; ce qui donne pour le signe représentatif, $\underset{\frac{7}{4}}{A}$.

On voit que la loi qui produit le dodécaèdre est la même que celle qui a lieu pour la variété métastatique, en agissant par deux rangées sur les bords correspondans du générateur. Mais de plus, si l'on cherche le rapport entre le sinus et le cosinus de la demi-incidence de 7 sur 7′, on trouve qu'il est celui de $\sqrt{29}$ à $\sqrt{3}$, lequel a lieu aussi dans le dodécaèdre métastatique (p. 336), avec cette différence, que l'incidence qui en résulte dans le premier dodécaèdre appartient aux faces les moins inclinées entre elles, tandis que dans le second ce sont les faces les plus

inclinées qui la donnent. J'ai cru qu'il ne serait pas indifférent de faire remarquer cette analogie entre les lois de structure relatives à deux rhomboïdes qui contrastent si fortement par le rapport de leurs dimensions, l'axe du générateur étant à la demi-diagonale oblique comme 3 à $\sqrt{3}$, et celui du noyau hypothétique étant à la même ligne comme 3 à $\sqrt{75}$, ou comme 3 à 5 $\sqrt{3}$.

Les sinus et les cosinus des angles égaux aux moitiés des incidences qui diffèrent dans les deux dodécaèdres, offrent aussi une corrélation qui me paraît mériter d'être citée. Dans le métastatique, leur rapport est celui de $\sqrt{5}$ à $\sqrt{3}$, et dans la variété bisadditive, celui de $\sqrt{175}$ à $\sqrt{3}$, ou celui de $5\sqrt{5}$ à $\sqrt{3}$, d'où l'on voit que le cosinus étant le même de part et d'autre, les sinus sont entre eux comme les demi-diagonales du générateur et du noyau hypothétique.

Le calcul donne pour l'incidence de 7 sur 7′, qui est commune aux deux dodécaèdres, $144^{d}\,20'\,26''$, et pour celle de 7 sur 7, qui est particulière à celui-ci, $162^{d}\,22'\,40''$.

Il me reste à indiquer les deux incidences des faces 7, 7, sur les pans du prisme. L'arête d, qui est la plus saillante, étant tournée vers l'un des rhombes du générateur, on fera, dans l'application de la formule à l'incidence de 7′ ou de 7 sur c'', $s=4$, $t=5$, et l'on aura (D) $gr : sz :: \sqrt{7} : 1$, ce qui donne $110^{d}\,43'\,43''$, pour l'incidence dont il s'agit. L'arête n

étant au contraire la moins saillante, les valeurs de s et de t seront 5 et 4, et l'on trouvera

$$gr : sz :: \sqrt{103} : 5,$$

ce qui donne pour l'incidence de $7'$ sur c, $116^d 14' 19''$.

202. La variété que je nomme *surbaissée*, et dont on voit la projection (fig. 151), se présente naturellement à la suite de la précédente, comme exemple d'un dodécaèdre qui tourne ses arêtes les moins saillantes, telles que λ, vers les faces du générateur, ainsi que l'indique la figure 5, pl. 15, dans laquelle *us* est plus petite que *au*. C'est ce qui la distingue de l'autre, avec laquelle elle a beaucoup d'analogie par son aspect, en sorte qu'à en juger d'après le coup-d'œil, on peut être tenté de les confondre. Le signe de celle dont il s'agit ici est $\underset{\overset{3}{t}}{B}\overset{2}{\underset{c}{e}}$. En supposant que l'on ait comme ci-dessus, $a = 9$, $g = \sqrt{27}$, $p = \sqrt{18}$, et en suivant, par rapport aux valeurs numériques des autres lignes, la marche qui a été tracée à l'égard de la bisadditive, on trouvera

$$a' = 3,\ g' = \sqrt{48},\ p' = \sqrt{17},\ n' = 2,\ n'' = 1,$$

ce qui indique deux rangées de soustraites sur l'angle supérieur du générateur. On voit que la loi qui produit le dodécaèdre, en agissant sur les bords inférieurs du noyau hypothétique, a lieu par deux rangées comme dans la variété métastatique, et aussi comme dans la bisadditive. A l'égard des incidences

mutuelles des faces du dodécaèdre, on a pour le rapport entre le sinus et le cosinus de la moitié de celle de t sur t' celui de $\sqrt{89}$ à $\sqrt{3}$, ce qui donne pour cette incidence $159^d\,11'\,34''$, et pour le rapport entre le sinus et le cosinus de la demi-incidence de t' sur t', $\sqrt{20} : \sqrt{3}$, d'où l'on déduit pour cette incidence $137^d\,39'\,26''$.

Dans les applications de la formule relative aux incidences sur les faces c, on fera $s=5$, $t=4$, s'il s'agit de celle de t ou de t' sur c', et l'on aura

$$(D)\, gr : rz :: \sqrt{67} : 5,$$

ce qui donne pour cette incidence $121^d\,25'\,3''$; et s'il s'agit de celle de t' ou de t'' sur c, on fera $s=4$, $t=5$; on trouvera $gr : rz :: \sqrt{19} : 2$, ce qui donne pour cette seconde incidence $114^d\,38'\,50''$.

203. Il me reste à traiter des dodécaèdres qui appartiennent au troisième cas, et qui sont produits par des décroissemens sur les angles latéraux du générateur. Je suivrai ici la même marche que dans l'article précédent, où j'ai commencé par déterminer d'une manière générale le noyau hypothétique.

Le dodécaèdre est susceptible, comme ceux qui sont compris dans le second [illegible] deux positions différentes, selon que ses [illegible] plus saillantes sont tournées vers les fac[illegible] r, or c'est le contraire qui a lie[illegible] r la première de ces positio[illegible]

sont les plus saillantes, répondent aux diagonales obliques *ad*, *gs*, de la coupe principale du générateur. Le quadrilatère *oa'ps'*, qui est celle du noyau hypothétique, tourne vers les mêmes diagonales les bords supérieurs *a'o*, *ps'* du rhomboïde auquel il appartient, et les diagonales obliques *a'p*, *os'* correspondent aux bords supérieurs *ag*, *ds*, du générateur.

A mesure que le décroissement qui donne le dodécaèdre devient plus rapide, les arêtes *to*, *pi*, se rapprochent des diagonales *ad*, *gs*, et leur différence de longueur avec les arêtes *oi*, *tp*, va en diminuant, en sorte qu'il y a un terme où elles deviennent égales, et à ce terme le dodécaèdre se trouve converti en double pyramide droite. Au-delà de ce terme, les effets inverses des précédens prennent leur place, ainsi qu'on le voit fig. 153. Les arêtes les plus saillantes *oi*, *tp*, du dodécaèdre, qui sont en même temps les plus courtes, sont tournées vers les bords supérieurs *ds*, *ag*, du générateur, et le contraire a lieu par rapport aux arêtes *ot*, *pi*. D'une autre part, les diagonales obliques *a'o*, *s'p*, du noyau hypothétique, et celles du générateur sont en regard, et c'est la même chose à l'égard des bords supérieurs.

J'ai déjà remarqué plus haut que les lignes *oz*, *px*, qui sont les perpendiculaires sur l'axe, dans le noyau hypothétique, ne coïncident pas avec les directions les lignes *gn*, *dr*, qui font la même fonction dans le ·énérateur : elles sont tantôt plus éloignées (fig. 152)

et tantôt plus voisines du centre (fig. 153). La différence va en diminuant, à mesure que le dodécaèdre approche du terme où il devient un solide pyramidal, et où l'axe du noyau hypothétique s'évanouit. Je reviendrai plus bas sur le défaut de coïncidence dont il s'agit, et je déterminerai le point de l'axe *ti*, qui donne la limite au-delà et en deçà de laquelle les perpendiculaires sur l'axe subissent un changement dans leurs positions respectives.

204. Je reprends maintenant la figure 152, et je vais déterminer diverses quantités relatives à l'hypothèse qu'elle représente.

Soit A l'axe du générateur, G et P les demi-diagonales de ses rhombes, $\frac{a}{g}$ le rapport de A à G, n l'exposant de la loi qui produit le dodécaèdre en agissant sur les angles latéraux, a' l'axe du noyau hypothétique, g' et p' les diagonales de ses faces, n' l'exposant de la loi qui en agissant sur ses bords inférieurs donne naissance au dodécaèdre, et n'' l'exposant de la loi susceptible de produire le noyau hypothétique comme forme secondaire du générateur.

J'ai donné plus haut les expressions des trois lignes *az*, *tz*, *iz*, nécessaires pour [illegible] plication de la formule, en adoptant comme [illegible] nnues l'exposant n et le rapport $\frac{a}{g}$. J'ai [illegible] xpre[illegible]

dont il s'agit $tz=4n$, $iz=2$[illegible]

Je [illegible] erverai, pour la fac[illegible]

j'en déduirai celles des diverses quantités dont j'ai parlé.

1°. Pour A ou as.

$as = ti - 2at = ti - 2 . \frac{as}{2n} = ti - \frac{as}{n}$; $ti = tz + iz = 6n + 3$;

donc

$$ti - 2at = 6n + 3 - \frac{as}{n};$$

donc

$$as = 6n + 3 - \frac{as}{n},$$

ou

$$as \,.\, n = 6n^2 + 3n - as,$$

et

$$as \,.\, n + as = 6n^2 + 3n;$$

donc

$$\text{A ou } as = \frac{6n^2 + 3n}{n + 1}.$$

2°. Pour G.

$$\text{A} : \text{G} :: a : g; \ \frac{6n^2 + 3n}{n + 1} : \text{G} :: a : g; \ \text{G} = \frac{g}{a} \,.\, \frac{6n^2 + 3n}{n + 1}.$$

3°. Pour P. Connaissant A et G, on aura facilement P, dont l'expression est $\sqrt{\tfrac{1}{3}\text{G}^2 + \tfrac{1}{9}\text{A}^2}$.

4°. Pour a'.

$$a' = 3iz - 3tz = 6n + 9 - 12n = 9 - 6n.$$

5°. Pour g'.

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} = oz = \frac{6n}{a}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

donc $$g' = \frac{6ng}{a}.$$

6°. Pour p'. On aura son expression, en procédant la même manière que pour celle de P.

7°. Pour n'. $a't$ ou $\frac{1}{2}(ti-a')$ étant la partie de l'axe du dodécaèdre qui excède de chaque côté l'axe du noyau hypothétique, et le décroissement ayant lieu sur les bords inférieurs de ce noyau, on aura

$$\tfrac{1}{2}(ti-a')=\frac{a'}{n'-1},$$

ou

$$\tfrac{1}{2}(6n+3-9+6n)=\frac{9-6n}{n'-1}, \text{ et } 2n-1=\frac{3-2n}{n'-1},$$

d'où l'on déduit $n'=\frac{2}{2n-1}$.

8°. Pour n''. Si l'on suppose que la diagonale oblique $a'p$ du noyau hypothétique se meuve parallèlement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle se trouve en contact avec le point g, il est aisé de voir qu'elle sera située à l'égard du générateur, comme une face d'un rhomboïde produit en vertu d'un décroissement par renversement sur l'angle situé à l'extrémité inférieure de la diagonale sg du générateur. La figure 154 représente les coupes des deux rhomboïdes dans leurs positions respectives; et d'après la formule qui a été employée pour les exemples du même genre, on a

$$gn:a'n::\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{2n''+2}{6n''-3}.a::g\sqrt{\tfrac{1}{3}}:\frac{n''+1}{6n''-3}.a::g'\sqrt{\tfrac{1}{3}}:\tfrac{1}{3}a',$$

ou

$$(2n''-1)g \text{ [illegible] })a :: g':a',$$

d'où l'on conclut

$$2n''a'g-a'g=n''ag' \text{ [illegible] } n''= \text{ [illegible]}$$

205. J'ai promis de déterminer la limite entre les deux positions de la ligne *oz* (fig. 152), l'une au-dessus, l'autre en dessous de la ligne *ln*. Pour y parvenir, il faut égaler les valeurs de *tz* et de *tn*, et en déduire la valeur de *n*. Or,

$$tn = at + an = \frac{a}{2n} + \frac{a}{3} = \frac{3a + 2an}{6n};$$

et substituant la valeur de $a = \frac{6n^2 + 3n}{n + 1}$,

$$tn = \frac{18n^2 + 9n + 12n^3 + 6n^2}{(n+1)6n} = \frac{4n^2 + 8n + 3}{2n + 2};$$

mais $$tz = 4n;$$

donc on aura

$$\frac{4n^2 + 8n + 3}{2n + 2} = 4n, \quad \text{ou} \quad 4n^2 = 3,$$

d'où l'on tire $n = \sqrt{\frac{3}{4}}$, quantité incommensurable, d'où il suit que la coïncidence des deux lignes sur une même direction ne répond à aucune loi possible de décroissement, en sorte qu'il y a un saut brusque d'une position à l'autre. Lorsque $n = \frac{3}{4}$, comme dans le dodécaèdre que nous considérons ici, on a $tn = \frac{45}{14}$, et $tz = \frac{45}{15}$. *tz* étant alors plus petite que *tn*, la ligne *oz* se trouve au-dessus de *ln*, comme le représente la figure. Si l'on fait $n = 1$, on aura $tz = \frac{45}{12}$, c'est-à-dire qu'elle sera plus grande que *tn*, qui conserve toujours sa valeur $\frac{45}{14}$, et la ligne *oz* sera située en dessous de *ln*. A mesure que la valeur de *n* variera

entre $\frac{3}{4}$ et l'unité, *oz* approchera de coïncider avec *ln*, soit dans un sens, soit dans l'autre, sans jamais arriver à une coïncidence exacte.

La ligne *oz* continuant de descendre en dessous de la ligne *ln*, après l'avoir dépassée, restera toujours en dessus de *dr*. Seulement, elle s'en rapprochera, à mesure que la loi de décroissement devenant plus rapide, la distance entre *ot* et *da* diminuera. Or, quelque petite qu'elle soit, les points *o* et *d* qui sont les extrémités des lignes *oz* et *dr*, seront toujours séparés, et lorsqu'ils coïncideront, la ligne *ot* se confondant elle-même avec la diagonale *ad*, le dodécaèdre s'évanouira.

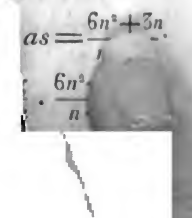
La ligne *oz*, en se rapprochant de *dr*, arrive à un terme où les lignes *tz*, *iz* deviennent égales; c'est ce qu'exprime l'équation $4n = 2n + 3$, d'où l'on tire $n = \frac{3}{2}$. Le dodécaèdre se trouve alors converti en une double pyramide droite hexaèdre. Au-delà de ce terme, *tz* devient plus grande que *iz*, ainsi qu'on le voit fig. 153. Voici les expressions algébriques des diverses lignes indiquées plus haut, qui conviennent au cas dont il s'agit.

1°. Pour A ou *as*. On a $as = \frac{6n^2+3n}{}$

2°. Pour G. On aura de $\frac{6n^2}{n}$

3°. Pour P. $P = \sqrt{\frac{1}{3}G^2 -}$

4°. Pour *a'*.



$— 3iz = 12n —$

5°. Pour g'. $g'=\frac{6ng}{a}$, comme ci-dessus.

6°. Pour p'. On déterminera son expression, en procédant comme pour celle de P.

7°. Pour n'. $\frac{1}{2}(ti-a')=\frac{a'}{n'-1}$. Substituant à la place de ti et de a' leurs valeurs $6n+3$ et $6n-9$, on trouvera $n'=\frac{2n-1}{2}$.

8°. Pour n''. Si l'on conçoit que la diagonale $a'o$ du noyau hypothétique se meuve parallèlement à elle-même vers le point t, jusqu'à ce qu'elle se trouve en contact avec le point a, il est facile de voir qu'elle sera située à l'égard du générateur comme une face d'un rhomboïde produit par un décroissement sur l'angle supérieur de ce générateur. On déterminera la valeur qui en résulte pour n'', en appliquant ici le calcul qui a été employé pour les dodécaèdres compris dans le second cas, et qui se rapporte à la fig. 5, pl. 15. La proportion de laquelle on déduit cette valeur est

$$\frac{(n''+1)}{n''}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n''-1}{3n''}.a :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}a',$$

ce qui donne

$$n''=\frac{2a'g+ag'}{2ag'-2a'g}.$$

206. La variété que j'ai choisie comme premier exemple relatif au troisième cas, et qui appartient [à] la chaux carbonatée, semble enchérir par

ses propriétés sur toutes celles qui ont été citées jusqu'ici. Son noyau hypothétique n'est pas simplement, comme dans ces dernières, un rhomboïde secondaire d'une forme particulière, duquel naît un dodécaèdre qui n'est lui-même qu'hypothétique, c'est une reproduction du générateur, et le résultat de la loi qui en fait dépendre le dodécaèdre se trouve réalisé par la cristallisation dans une autre variété que j'indiquerai plus bas.

Celle dont il s'agit ici, et que représente la fig. 155, porte le nom d'*anarmostique.* Son signe est......

$\underset{u}{\overset{1}{D}}E^{11}\underset{f}{\overset{\frac{4}{5}}{E}}e\underset{h}{E^{\frac{3}{2}}}\underset{v}{{}^{\frac{1}{3}}E}\underset{\overset{1}{o}}{A}$. Les faces *v*, *v*, appartiennent au dodécaèdre que nous avons ici à considérer, et qui est représenté séparément (fig. 156). On voit (fig. 157) la projection de son noyau hypothétique. En comparant les figures 152 et 157, on remarquera du premier coup-d'œil que ce noyau rentre parmi ceux dont la coupe principale tourne ses bords supérieurs *a'o*, *ps'*, vers les diagonales obliques *ad*, *gs*, du générateur. Dans le même cas, les arètes les plus saillantes *c*, *c'* (fig. 156) du dodécaèdre répondent aussi à ces diagonales, et de plus leur sont parallèles.

L'exposant de la loi qui donne le dodécaèdre étant représenté par $\frac{3}{4}$, dans les applications de la théorie, cherchons les valeurs numériques dont nous avons donné plus haut les expressions algebriques. Nous



aurons,

1°. A ou $as = \frac{6n^2+3n}{n+1} = \frac{45}{14}$.

2°. $G = \frac{g}{a} \times \frac{6n^2+3n}{n+1} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{45}{14}$.

3°. $a' = 9 - 6n = \frac{9}{2}$; $g' = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$.

De là il suit que

$$a' : g' :: \sqrt{3} : 1 :: A : G.$$

C'est-à-dire que le noyau hypothétique est semblable au générateur, ainsi que je l'ai annoncé.

4°. $n' = \frac{2}{2n-1} = 4$.

5°. $n'' = \frac{a'g + ag'}{2a'g - ag'} = 2$. C'est-à-dire que le rhomboïde hypothétique est susceptible d'être produit à l'aide d'un décroissement par deux rangées en hauteur sur les angles inférieurs du générateur, lequel décroissement donne un rhomboïde secondaire semblable au primitif, et c'est ce qui doit avoir lieu dans le cas présent.

207. Mais ce n'est pas tout : la loi du décroissement par quatre rangées qui, en agissant sur les bords inférieurs du noyau hypothétique, est susceptible de faire naître le dodécaèdre, existe dans la variété de chaux carbonatée que j'ai nommée *ascendante*, et que représente la figure 158. C'est d'elle que dérivent les faces n, n, qui se combinent avec les faces m du rhomboïde contrastant et les pans c, c du prisme hexaèdre, ce qui donne pour le signe représentatif

de cette variété, $\overset{2}{e}_{c}\,\overset{3}{e}_{m}\,\overset{4}{D}_{n}$. Ce second cas donne une existence réelle à ce dont le premier n'indique que la possibilité.

Il me reste à déterminer les incidences de faces f, o et h, sur celles du dodécaèdre.

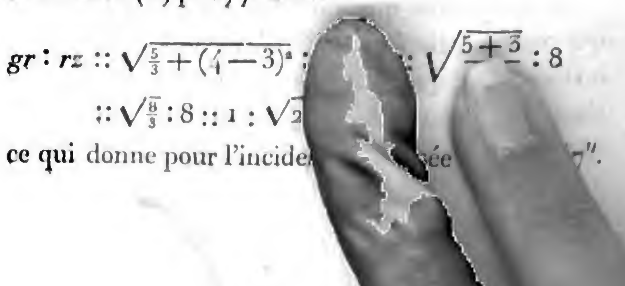
1°. Pour f. Je reprends la figure 152, et je cherche les valeurs numériques des coordonnées tz, iz et oz, à l'aide de leurs expressions algébriques trouvées ci-dessus (p. 592). Nous aurons $tz=4n=4\cdot\frac{3}{4}=3$,

$$iz=2n+3=2\cdot\frac{3}{4}+3=\frac{9}{2},\quad oz=\frac{6n}{a}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}=3.$$

Maintenant, je considère que le rhomboïde hypothétique qui fait ici la fonction de générateur, et dont la coupe principale est $a'os'p$, tourne ses diagonales obliques vers les arêtes les moins saillantes du dodécaèdre. Ainsi le rapport de s à t sera celui de tx à ix. Or, $tx=iz=\frac{9}{2}$; $ix=tz=3$. Donc $s=\frac{9}{2}$ et $t=3$. De plus, $px=oz=3=\sqrt{\frac{4}{3}g'^2}$. Donc $g'=\frac{3}{2}\sqrt{3}$. Multipliant toutes ces quantités par $\frac{2}{3}$, nous aurons

$$s=3,\ t=2,\ g'=\sqrt{3}.$$

Or, les faces du rhomboïde f se rapportent au cas de la formule (C) p. 577. Donc



$gr : rz :: \sqrt{\frac{5}{3}+(4-3)^2}$: [illegible] : $\sqrt{\frac{5}{3}+\frac{3}{3}} : 8$

$:: \sqrt{\frac{8}{3}} : 8 :: 1 : \sqrt{2}$ [illegible]

ce qui donne pour l'incide[illegible]sée [illegible]7".

2°. Pour o. La formule (B) donne

$$sr : rz :: \sqrt{1+27} : \sqrt{12} :: \sqrt{7} : \sqrt{3};$$

d'où l'on déduit pour l'incidence de o sur v 132^{d}13′22″.

3°. Pour h. On pourrait conclure l'incidence de cette face sur les faces v, v, de celle qui a lieu entre ces dernières, en ajoutant 90^d à celui qui en donne la mesure. Mais, pour ne pas laisser la formule (a) sans application, je la substituerai ici à celle que j'ai indiquée en traitant des décroissemens sur les angles latéraux d'un rhomboïde. Nous aurons donc

$$sr : rz :: \sqrt{\tfrac{1}{3}(4+9)} : 4+9 :: 1 : \sqrt{39},$$

ce qui donne pour l'incidence proposée 170^{d}54′9″.

La variété ascendente qui sert ici de terme de comparaison à l'anarmostique, va nous fournir une nouvelle application de la formule, dont le sujet sera l'incidence des faces m (fig. 158) du rhomboïde contrastant sur les faces n, n, du dodécaèdre combiné avec ce rhomboïde. D'après ce qui a été dit de la similitude entre le même dodécaèdre et celui auquel appartiennent les faces v, v (fig. 155), nous aurons toujours $s=3$, $t=2$, $g=\sqrt{3}$, et de plus $m=1$, $b=4$. Ces valeurs substituées dans la formule (A) donnent

$$sr : rz :: \sqrt{\tfrac{17}{3}+25} : 2+12 :: \sqrt{82} : \sqrt{588},$$

d'où l'on déduit pour l'incidence de m sur n (fig. 158) 159^{d}21′21″.

208. J'ai maintenant à proposer un second exemple tiré d'un dodécaèdre qui tourne ses arêtes les moins saillantes vers les faces du générateur. Je choisirai la variété de fer oligiste que je nomme *uni-sénaire*, et que représente la fig. 31. Son signe est $\underset{P}{P}\,\underset{\overset{1}{o}}{A}\,E^{66}\underset{g}{E}$.

L'exposant de la loi qui donne le dodécaèdre étant 3, et les valeurs numériques du rapport entre les dimensions du générateur qui sont censées connues étant $a = \sqrt{63}$, $g = \sqrt{9}$, $p = \sqrt{10}$, si l'on cherche celles des autres quantités, d'après les expressions algébriques données plus haut, on aura

1°. A ou $as = \frac{6n^2 + 3n}{n + 1} = \frac{63}{4}$.

2°. $G = \frac{g}{a} \cdot \frac{6n^2 + 3n}{n + 1} = \sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \frac{63}{4}$.

3°. $P = \sqrt{\frac{1}{3}G^2 + \frac{1}{9}A^2} = \frac{3}{4}\sqrt{70}$.

4°. $a' = 6n - 9 = 9$.

5°. $g' = \frac{18}{\sqrt{7}}$.

6°. $p' =$.

7°. $n' = \frac{2n - 1}{2} = \frac{5}{2}$.

8°. $n'' = 2$. Cette loi est [illegible] donne [illegible]om-boïde semblable à celui d[illegible]e est

Pour déterminer l'incid[illegible] faces dodécaèdre sur la face *o* pe[illegible]aire à se servira de la formule sim[illegible]ativen

cas de ce genre, et qui est $sr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2+3s^2} : 2g$, $s=4n=12$, $t=2n+3=9$, $g'=\frac{18}{\sqrt{7}}$.

Donc nous pouvons faire $s=4$, $t=3$, $g'=\sqrt{\frac{36}{7}}$.

Ces valeurs substituées dans la formule donnent

$$sv : vz :: \sqrt{4+48} : \sqrt{\tfrac{36}{7}} \cdot 4 :: \sqrt{13} : \sqrt{\tfrac{36}{7}} :: \sqrt{91} : 6;$$

d'où l'on conclura pour l'incidence proposée..... 126[d] 16'.

209. J'ajouterai ici un exemple relatif au cas où le décroissement sur les angles latéraux ayant $\frac{3}{2}$ pour exposant, le dodécaèdre qui en résulte est composé de deux pyramides droites réunies par leurs bases. Le sujet de cet exemple sera la variété de fer oligiste dont on voit la projection (fig. 35) et que je nomme *bino-ternaire*. Elle a pour signe $\underset{P}{P}\underset{n}{E^{33}}E\underset{\overset{2}{s}}{A}$. L'incidence qu'il s'agit de déterminer, à l'aide de la formule modifiée convenablement est celle des faces n, n du dodécaèdre, sur les faces s, s du rhomboïde terminal. Dans ce cas on a

$$sr : rz :: \sqrt{s^2 \cdot \tfrac{1}{3}(m^2+6^2)+(ms-2b\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2})^2} : 2m\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}+65;$$

Nous avons eu

$$ti = 6n+3 = 12;$$

nc

$$s=6,\ g'\,\frac{6n \cdot g}{a} = 9 \cdot \sqrt{\tfrac{9}{63}} = \frac{9}{\sqrt{7}};$$

donc

$$s : g' :: 6 : \frac{9}{\sqrt{7}} :: 2 : \frac{3}{\sqrt{7}} :: \sqrt{28} : \sqrt{9}.$$

Ainsi nous pouvons faire $s = \sqrt{28}$. $g = \sqrt{9}$. Dans le rhomboïde terminal $g'' : p'' :: 12 : \sqrt{55}$. Donc

$$a'' : g'' :: \sqrt{63} : \sqrt{144}; \text{ et } \sqrt{\tfrac{1}{3}g''^2} : \tfrac{1}{3}a' :: \sqrt{48} : \sqrt{7} :: m : b.$$

Substituant ces valeurs dans la formule, on aura

$$sr : rz :: \sqrt{28 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 55 + (\sqrt{48 \cdot 28} - 2\sqrt{7 \cdot 3})^2} : 2\sqrt{48 \cdot 3} + \sqrt{7 \cdot 28},$$

et en réduisant, :: $\sqrt{952} : \sqrt{1083}$. Ce rapport donne pour l'incidence proposée $136^d 51'$.

210. Je vais terminer cet article par un résumé des applications que j'ai faites de la formule à la théorie de la chaux carbonatée, qui est de toutes les espèces minérales la plus féconde, sous tous les rapports, en modifications diversifiées. J'ai observé jusqu'ici, parmi ses formes cristallines, 17 rhomboïdes différens, auxquels il faut ajouter les deux limites, dont l'une donne des faces perpendiculaires à l'axe, et l'autre des faces qui lui sor[...]llèles, ce qui fait en tout 19. Le nombre [...]dres qui font partie de la même série [...]ultipli[...]es deux nombres l'un par l'[...]75 c[...] sons binaires relatives au[...] autant d'incidences respe[...] dans ces combinaisons. Par[...]

a environ 70 qui existent sur les formes que renferme ma collection. Plusieurs de ces mêmes incidences m'ont été offertes par de nouvelles variétés que j'ai reçues récemment, et l'on a tout lieu de présumer qu'à mesure qu'il s'en présentera d'inconnues, le nombre de celles qui seront susceptibles des applications de la formule s'accroîtra de plus en plus. J'ai pensé que ce détail achèverait de faire sentir l'utilité d'un moyen de détermination, à l'aide duquel la marche est tracée d'avance, pour arriver en un instant à une solution aussi expéditive que facile de tous les problèmes du même genre dont les découvertes à venir pourront fournir la matière.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE

DES PRINCIPAUX ARTICLES

CONTENUS DANS CE VOLUME.

PARTIE SYNTHÉTIQUE.

PARTIE ANALYTIQUE.

FIN DE LA TABLE DES ARTICLES.



